

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorräume.....	1
1.1	Begriffe und Definition.....	1
1.2	Lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren	1
1.3	Unterräume.....	2
1.3.1	Der Durchschnitt als Unterraum.....	2
1.3.2	Die Summe als Unterraum	2
1.3.3	Die lineare Hülle als Unterraum	2
1.4	Basis und Dimension	3
1.4.1	Dimensionssatz.....	4
2	Vektorräume mit Skalarprodukt.....	4
2.1	Skalarprodukte und Hermitesche Form	4
2.2	Norm und Orthogonalität	5
2.2.1	Koordinaten bezüglich einer Orthonormalbasis.....	5
2.2.2	Koordinaten bezüglich einer Orthogonalbasis	6
2.3	Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren.....	6
2.4	Orthogonale Komplemente	6
2.5	Näherungslösungen	7
2.5.1	Orthogonalprojektion als Näherungen.....	7
2.5.2	Näherungslösungen für lineare Gleichungssysteme	7
3	Taylor-Reihe.....	9

1 Vektorräume

1.1 Begriffe und Definition

Ein **Vektorraum** V ist eine Menge, deren Elemente sich addieren und skalar multiplizieren lassen, wobei die Summe von Vektoren und das Vielfache eines Vektors wieder Elemente der Menge sind. Die Elemente eines Vektorraumes sind Vektoren.

Definition

Eine nichtleere Menge V , in der man zu je zwei Elementen $a, b \in V$ eine Summe $a + b \in V$ bilden kann, und in der eine **skalare Multiplikation** $\lambda a \in V$, $a \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ existiert, heisst ein **Vektorraum über dem Körper** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn folgende Rechengesetze erfüllt sind:

- 1) Für alle $a, b \in V$ gilt: $a + b = b + a \rightarrow$ Die Addition ist kommutativ
- 2) Für alle $a, b \in V$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c) \rightarrow$ Die Addition ist assoziativ
- 3) Es gibt ein Nullelement oder Nullvektor $0 \in V$ mit $a + 0 = a$ für alle $a \in V$
- 4) Zu jedem $a \in V$ gibt es genau ein inverses Element $-a \in V$ mit $a + (-a) = 0$
- 5) $1a = a$ für alle $a \in V$
- 6) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, a \in V$
- 7) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, a, b \in V$
- 8) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, a \in V$

1.2 Lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren

Definition

Gegeben sei ein Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$ und die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ des Vektorraumes V heissen **linear abhängig**, wenn es Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Die Vektoren heissen **linear unabhängig**, wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h.

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

- Die lineare Abhängigkeit von Vektoren lässt sich wie folgt verstehen

Satz

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt.