

Zusammenfassung MDM - KombinatorikDef Kombinatorische Probleme

- Anordnungsmöglichkeiten mit und ohne Wiederholungen
- Auswahlprobleme mit und ohne Wiederholungen

Schubfachprinzip

Satz: Falls man n Objekte auf m Mengen verteilt, und n grösser als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet

Schubfachprinzip: starke Form

Satz: Seien $q_1, q_2, \dots, q_n$ natürliche Zahlen. Verteilt man $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ Objekte auf n Mengen, dann enthält entweder die erste Menge mind. q_1 Objekte oder die 2. Menge mind. q_2 Objekte, ..., oder die n -te Menge mind. q_n Objekte.

Permutationen

- Permutationen sind Anordnungen von Objekten.

Z.B. a, b, c b, a, c c, a, b a, c, b b, c, a
 c, b, a

o Ohne Wiederholungen

n -verschiedene Elemente mit unterschiedlicher Anordnung

$$n!$$

o Mit Wiederholungen

- n -Elemente mit unterschiedlicher Anordnung, wobei das i -te Element n_i mal auftritt
- Treten unter n Elementen k Gruppen von unter sich

nicht unterscheidbaren Elementen auf, welche $p_1, p_2, \dots, p_k$ Elemente enthalten, so ist die Anzahl aller Permutationen mit Wdh.:

$$N = \frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \dots \cdot p_k!}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{m+n}{m, n} = \binom{m+n}{m}$$

$$\binom{m+n}{m, n} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$$

- Gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge)

$$\binom{n}{k} \rightarrow n \text{ tief } k$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

o Rechenregeln

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

o Es gilt:

$$a) \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

$$b) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$c) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$d) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

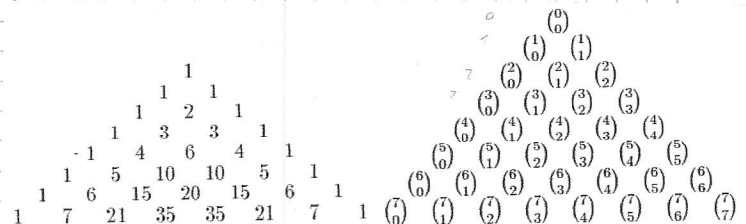
Berechnung BK

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

TR

$$\text{Math} \rightarrow \text{PRB} \rightarrow nCr$$

$$4nCr2 = 6$$



Geordnete Stichproben (Variation)

• Mit Zurücklegen (mit Wdh.)

Satz: Aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen werden k Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge ausgewählt und wieder in die Menge zurückgelegt

$$N = n^k$$

• Ohne Zurücklegen (ohne Wdh.)

Satz: Aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen werden k Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge ausgewählt ohne sie in die Menge zurückzulegen

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ungeordnete Stichproben (Kombinationen)

• Mit Zurücklegen

Satz: Aus einer Menge mit n versch. Elementen können s Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Wiederholungen auf

$$N = \frac{(s+n-1)!}{s! \cdot (n-1)!} = \binom{s+n-1}{s}$$

verschiedene Arten ausgewählt werden.

• Ohne Zurücklegen

Satz: Die Anzahl Teilmengen T mit k Elementen aus einer Menge A mit n Elementen ist

$$N = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

→ Aus n verschiedenen Elementen werden k verschiedene Elemente ohne Berücksichtigung der Anordnung ausgewählt

Gruppenbildung & Partitionen

Satz: Sei $f: X \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ eine surjektive Abbildung, dann bilden die Mengen $X_k = \{x \in X \mid f(x) = k\}$, $k=1, \dots, k$ eine Partition einer Menge X , d.h. es gilt:

$$X = \bigcup_{k=1}^k X_k, X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j$$

• Definition

Gegeben seien die Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Der Koeffizient
$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

heißt Multinomial-Koeffizient

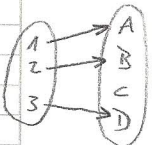
Satz: Sei X eine Menge mit $|X|=n$. Die Anz. surjektiver Abbildungen $f: X \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ mit der Auflage, dass n_1 Elemente von X auf 1, n_2 Elemente auf 2, ..., n_k Elem. auf k abgebildet werden ist:

$$N = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

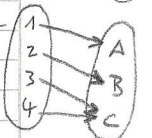
Dies ist die Anz. Partitionen von X in k Teilmengen X_i mit $|X_i|=n_i$

Allgemeine Definitionen

• Injektiv: Jedes Elem. der Zielmenge höchstens 1mal verwenden

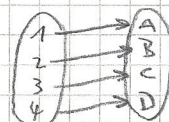


• Surjektiv: Jedes Elem. der Zielmenge mind. 1mal verwenden



• Bijektiv: Injektiv und surjektiv.

Vollständige Paarbildung zwischen den Elementen der Definitions- und der Zielmenge.



Ableitungsregeln

- 1) $(c)' = 0$
- 2) $(x)' = 1$
- 3) $(\exp(x))' = \exp(x)$
- 4) $(\log(x))' = \frac{1}{x}$
- 5) $(\sin(x))' = \cos(x)$
- 6) $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- 7) $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- 8) $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 9) $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 10) $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Summe: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Produkt: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Ketten: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Quotient: $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$

Reziproken: $\left(\frac{1}{h}\right)' = -\frac{h'}{h^2}$

Potenz: $(x^n)' = n x^{n-1}$

Log. regel: $(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$

1. Ableitung: Steigung der Tangente

2. Ableitung: Krümmungsverhalten

Aufleiten

$$2x^3 = \frac{1}{4} \cdot 2x^4 = \frac{2}{4}x^4 = \frac{1}{2}x^4$$

→ Exponent + 1

→ Kehrwert von neuem Exponent vorne hin

Ableiten

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

GGT bei Polynome

→ Euklidischer Algorithmus

$$253 : 143 = 1 \text{ Rest } 110$$

$$143 : 110 = 1 \text{ Rest } 33$$

$$110 : 33 = 3 \text{ Rest } 11 \rightarrow \text{ggT}$$

$$33 : 11 = 3 \text{ Rest } 0$$

GGT = zweitletzter Rest

KGV bei Polynome

reduzible Polynome

$$x^2 + px + q = 0$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$= p^2 - 4q \Rightarrow \text{Diskriminante}$$

Horner Schema

Funktion 3. Grades

$$\rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$= x[a_1 + a_2x + a_3x^2] + a_0$$

$$= x[x[a_2 + a_3x] + a_1] + a_0$$

Umkehrbare Abbildungen: $f: M \rightarrow M$

Eine n -elementige Menge hat

$n!$ Bijektionen (umkehrbare Abb.)

Fixpunktfreie Permutationen

Eine n -elementige Menge hat

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

$$= n! \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Viele fixpunktfreie Permutationen

Kombinatorik

Permutation ohne Wahl: n -verschiedene Elemente mit unterschiedlicher Anordnung $\rightarrow n!$

Permutation mit Wahl: n -Elemente mit untersch. Anordn., wobei das i -te Element n_i mal auftritt $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_s!} \rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_s = 1$ ($n_s \leq s$)

Variationen ohne Wahl: Aus n versch. Elementen werden k versch. Elem. unter Berücksichtigung der Anordnung ausgewählt, wobei sich die Elem. bis zu k -mal wiederholen $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ ($1 \leq k \leq n$)

Variationen mit Wahl: Aus n versch. Elem. werden k versch. Elem. unter Berücksichtigung der Anordnung ausgewählt $\rightarrow n^k$

Kombinat. ohne Wahl: Aus n versch. Elem. werden k versch. Elem. ohne Berücks. der Anord. ausgewählt $\rightarrow \binom{n}{k}$

Kombinat. mit Wahl: Aus n versch. Elem. werden k Elem. unter Berücks. der Anordnung ausgewählt, wobei sich die Elem. bis zu k -mal wiederholen $\binom{n+k-1}{k}$ ($k \geq 1$)

Binomialkoeffizienten

$$\binom{m+n}{m, n} = \binom{m+n}{m} / \binom{k}{m} \text{ sprich } k \text{ tief } m \quad \binom{9}{5,4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$$

$$\binom{m+n}{m, n} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$$

$$\text{Berechnung BK: } \binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \dots \cdot (a-k+1)}{k!}$$

Polynome $\sum_{k=0}^n a_k x^k \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \deg(f) = n$

a_k = Koeffizienten des Polynoms | $\deg(f(x)) = n$ (Grad)

$$(-2x^5 + 5x^2 - 3x + 2) \Rightarrow (2, -3, 5, 0, 0, -2)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \dots + (n-1) n a_n x^{n-2}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 x + \dots + (n-2)(n-1)n a_n x^{n-3}$$

$$f^{(n)}(x) = n!$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$f'''(0) = 3! a_3 \rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Schubfachprinzip

A1 Zeige, dass unter 13 Personen es stets 2 gibt, die im selben Monat geboren sind.

Schubfächer: Januar, Februar, ..., Dezember

Anz. Schubfächer: 12

Anz. Personen: 13

$\Rightarrow$ In einem Schubfach sind mind. 2 Personen

A2 Man beweise, dass es in NY zwei Personen gibt, die gleich viele Haare auf dem Kopf haben.

Ein Mensch hat nicht mehr als 500'000 Haare

$\Rightarrow$ Anz. SF: 500'000

Personen in NY: $> 500'000$

Verteilt man mehr als 500'000 Einwohner auf die Schubfächer, hat mind. 1 SF mehr als 2 Personen

$\Rightarrow$ Diese haben gleich viele Haare

A3 Wie viele Personen braucht man, um mit Sicherheit behaupten zu können, dass q Personen denselben Geburtstag haben?

Anz. Schubfächer: 365

Jedes SF hat q Personen.

$\Rightarrow nq - n + 1 = 365q - 364$

A4 Sei $A \subset \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ und A habe 17 Elemente.

Zeige: Es gibt $a, b \in A$ mit $a+b=33$.

Man unterteilt $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$ in 16 Mengen mit $a+b=33$

$\{1, 32\}, \{2, 31\}, \{3, 30\}, \{4, 29\}, \{5, 28\}, \{6, 27\}, \{7, 26\}, \{8, 25\}, \{9, 24\}, \{10, 23\}$

$\{11, 22\}, \{12, 21\}, \{13, 20\}, \{14, 19\}, \{15, 18\}, \{16, 17\}$

Jede Zahl von $\{1, 2, 3, \dots, 32\}$ liegt genau in einer dieser Mengen.

Falls die ersten 16 Elemente der Teilmenge A entweder das linke oder das rechte Element besetzt, dann besetzt das 17. Element in einer Menge zwei Elemente. Somit gibt es Zahlen $a, b \in A$ mit $a+b=32$.

A5 Von $n+1$ natürlichen Zahlen haben sicher zwei eine Differenz, die durch $n \in \mathbb{N}$ teilbar ist.

Tip: für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt: $y - x = q \cdot n + r \quad 0 \leq r < n$

Durch geeignete Nummerierung kann man die $n+1$ Zahlen in aufsteigender Reihenfolge sortieren: $z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1}$. Mit der kleinsten Zahl bilden wir $z_k - z_1 = q_k \cdot n + r_k \quad q_k \in \mathbb{N}, 0 \leq r_k < n \quad k=2, \dots, n+1$

Wir nehmen an, dass alle Reste $r_k \neq 0$ sind, sonst ist die Aussage bewiesen.

Somit ist $r_k \in \{1, \dots, n-1\}$, das sind $n-1$ Reste. Für $k=2, \dots, n+1$ hat man n Reste $r_k = z_k - z_1 - q_k \cdot n$.

Mit dem SF-Prinzip müssen also zwei Reste gleich sein: $r_i = r_j \quad i < j$.

Also folgt: $z_i - z_1 - q_i \cdot n = z_j - z_1 - q_j \cdot n \Rightarrow z_j - z_i = (q_j - q_i) \cdot n \quad q_j - q_i \in \mathbb{Z}$

Somit gibt es zwei Zahlen z_i und z_j deren Differenz teilbar ist durch n .

A6 Gegeben sind 12 verschiedene zweistellige natürliche Zahlen. Zeige, dass zwei von ihnen eine Differenz der Form aa haben (zwei gleiche Ziffern)

Tip: Die Zahl aa ist teilbar durch 11.

Zahlen aufsteigend sortieren: $z_1 < z_2 < \dots < z_{12}$

Mit der kleinsten Zahl z_1 bilden wir $z_k - z_1 = q_k \cdot 11 + r_k \quad q_k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq r_k < 11 \quad k=2, \dots, 12$

Wir nehmen an, dass alle Reste $r_k \neq 0$ sind, $r_k \in \{1, \dots, 10\}$, das sind 10 Reste. Für $k=2, \dots, 12$ hat man 11 Reste $r_k = z_k - z_1 - q_k \cdot 11$

Mit dem SF-Prinzip müssen also 2 Reste gleich sein: $r_i = r_j, i < j$.

Also folgt $z_j - z_i = (q_j - q_i) \cdot 11 \quad q_j - q_i \in \mathbb{N}$

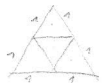
Somit gibt es 2 Zahlen z_i und z_j deren Differenz ein Vielfaches von 11 ist d.h. $z_j - z_i \in \{11, 22, \dots, 99\}$

A7 In einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 2 hat es 5 Punkte. Zeige, dass zwei der Punkte einen Abstand ≤ 1 aufweisen. Wie sieht es bei 17 Pkt aus?

Tip: Ursprüngliches Δ in kleinere gleichseitige Δ zerlegen

Urspr. Δ in 4 gleichs. Δ mit Seitenlänge 1 zerlegen. Von 5 Pkt

müssen 2 im gleichen kleinen Δ mit Seitenlänge 1 liegen. Somit ist der Abstand zwischen diesen beiden Pkt ≤ 1

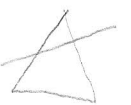


A8 Eine Gerade geht nicht durch die Ecken eines Δ . Zeige, dass sie nicht alle Seiten des Δ schneiden kann.

Tip: Eine Gerade in der Ebene zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen

Lege eine Gerade in die Ebene, nicht durch eine Ecke des Δ . Die Ebene wird dadurch in zwei Halbebenen zerlegt. Die Gerade schneide eine Seite, dann liegen die Ecken dieser Seite in verschiedenen Halbebenen.

Die dritte Ecke des Δ liegt in einer der Halbebenen, welche dann zwei Ecken des Δ enthält. Die Seite dieser zwei Ecken wird nicht durch die Gerade geschnitten



Binomische Formel

A1 Vereinfache den Term so weit wie möglich

$$a) \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{n! \cdot n}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(3 \cdot 2 \cdot 1)(4-1)}{n! \cdot (n+1)!}$$

$$b) \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{2n \cdot (2n+1)}{1} \quad \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2n(2n+1) \text{ bei } n=2$$

$$c) \frac{n!}{n(n-1)} = \frac{(n-2)!}{1} \quad \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{7 \cdot 6}$$

A2 Berechne:

$$a) \binom{10}{2} - \binom{9}{2} = 45 - 36 = \underline{\underline{9}}$$

$$b) \binom{20}{20} - \binom{20}{19} + \binom{20}{18} = \underline{\underline{171}}$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$$

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$$

$$c) \binom{10}{5} : \binom{9}{4} = 252 : 126 = \underline{\underline{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{A3 Berechne: } (a + \frac{1}{a})^4 &= a^4 + 4a^3(\frac{1}{a}) + 6a^2(\frac{1}{a})^2 + 4a(\frac{1}{a})^3 + 1(\frac{1}{a})^4 \\ &= a^4 + \frac{4a^3}{a} + \frac{6a^2}{a^2} + \frac{4a}{a^3} + \frac{1}{a^4} \\ &= \underline{\underline{a^4 + 4a^2 + 6 + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^4}}} \end{aligned}$$

A4 Vereinfache den Term:

$$a) \binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot (n+1-(n-1))!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \binom{n}{3} + \binom{n}{2} &= \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{3!(n-2)!} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{3!} \end{aligned}$$

(Regel: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$)

$$c) \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{3} = \underline{\underline{\binom{n}{2}}}$$

$$d) \binom{n}{3} : \binom{n-1}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} : \frac{(n-1)!}{3!(n-1-3)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} : \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{3!(n-4)!}{(n-1)!} = \frac{n}{n-3}$$

$$e) \binom{n+1}{7} : \binom{n-1}{7} = \frac{(n+1)!}{7!(n+1-7)!} : \frac{(n-1)!}{7!(n-1-7)!} = \frac{(n+1)!}{7!(n-6)!} : \frac{(n-1)!}{7!(n-8)!} = \frac{(n+1)!}{7!(n-6)!} \cdot \frac{7!(n-8)!}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{(n-6)(n-7)}$$

A5 Bestimme den Binomialkoeff. von: $a^4 b^{11}$ in $(a-b)^{15}$

$$-\binom{15}{11} = \underline{\underline{-1365}}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \binom{15}{0} & \binom{15}{1} & \binom{15}{2} & \binom{15}{3} & \binom{15}{4} & \binom{15}{5} & \binom{15}{6} & \binom{15}{7} & \binom{15}{8} & \binom{15}{9} & \binom{15}{10} & \binom{15}{11} & \binom{15}{12} & \binom{15}{13} & \binom{15}{14} & \binom{15}{15} \\ 1 & 15 & 105 & 455 & 1365 & 3003 & 5005 & 6435 & 6435 & 5005 & 3003 & 1365 & 455 & 105 & 15 & 1 \\ a^{15} & a^{14} & a^{13} & a^{12} & a^{11} & a^{10} & a^9 & a^8 & a^7 & a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a^1 & a^0 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & b^6 & b^7 & b^8 & b^9 & b^{10} & b^{11} & b^{12} & b^{13} & b^{14} & b^{15} \\ + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - \end{array}$$

A6 Welcher Summand in der binomischen Entwicklung von $(a+2b)^{10}$ hat den grössten Koeffizienten?

$$\binom{10}{k} 2^k \text{ am grössten für } k=7, \text{ nämlich } \underline{\underline{15360}}$$

A7 Löse die Gleichung:

$$a) \binom{x}{2} = 595 \Rightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 595 = \frac{x!}{(x-2)!} = 2 \cdot 595 = x(x-1) = 1190$$

$$x^2 - x - 1190 = 0 = (x-35)(x+34) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 35 \\ x_2 = -34 \end{array}$$

$$\begin{aligned} b) \binom{x+1}{3} &= 56 \Rightarrow \frac{(x+1)!}{3!(x+1-3)!} = \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} = \frac{(x+1)x \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-k+1)}{3!(x-2)!} \\ &= \frac{(x+1)x(x-1)}{6} = 56 = (x^2-1)x = 336 \\ &= x^3 - x - 336 = 0 \Rightarrow \text{solve}(X, X, 10) \Rightarrow \underline{\underline{x=7}} \end{aligned}$$

8a) Berechne mit Hilfe der binomischen Formel auf 3 Stellen nachd. Komma

$$a) 0,999^{10} = (1-0,001)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-0,001)^k = 1 - 0,01 + 0,000045 - \dots = \underline{\underline{0,990}}$$

$$b) 1,003^5 = (1+0,003)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (0,003)^k = 1 + 0,015 + 0,00009 + \dots = \underline{\underline{1,015}}$$

Kombinatorik 1

A1 Gegeben sind die Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4

a) Wieviele 7-stellige Zahlen können damit gebildet werden, die mit der Ziffer 2 beginnen?

2 bereits verwendet, also noch 6 Stellen verfügbar

→ Zahl 1 kommt 3mal vor

Zahl 2 kommt 1mal vor

Zahl 3 kommt 1mal vor

Zahl 4 kommt 1mal vor

} Permutationen mit Wdh

$$\Rightarrow \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{720}{6} = \underline{\underline{120}}$$

b) Wieviele dieser Zahlen sind ungerade

→ letzte Ziffer 3 oder 1

$$\Rightarrow \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} + \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 60 + 20 = \underline{\underline{80}}$$

A2 Die Mitglieder von drei 4er-Mannschaften sollen sich in einer Reihe aufstellen, so dass jede Mannschaft zusammen bleibt. Wie gross ist die Anzahl Möglichkeiten?

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Permutationen innerhalb der Mannschaften: $(4!)^3$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

Permutationen der ganzen Mannschaften: $3!$

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

$$\Rightarrow (4!)^3 \cdot 3! = \underline{\underline{82944}}$$

A3 Wie viele 5-stellige Zahlen können mit den Ziffern 1, 2, 2, 3, 3, 3 gebildet werden?

	1	2	3	Prototyp	Anz Perm. mit Wdh
1	1	2	2	12233	$\frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$
1	1	1	3	12333	$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = 20$
1	0	0	4	13333	$\frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$
0	2	2	1	22333	$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$
0	1	0	4	23333	$\frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$

Total : 70

A4 6 Sprinter kämpfen um 3 Medaillen (Gold, Silber, Bronze). Auf wie viele Arten kann die Preisverteilung erfolgen?

Für Gold: 6 Möglichkeiten

Für Silber: 5 Möglichkeiten

Für Bronze: 4 Möglichkeiten

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für Gold: 6 Möglichkeiten} \\ \text{Für Silber: 5 Möglichkeiten} \\ \text{Für Bronze: 4 Möglichkeiten} \end{array} \right\} 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120 \text{ Möglichkeiten}}}$$

A5 An einem Tischtennisturnier nehmen 10 Spieler teil. Wie viele versch. Paarungen sind für die erste Runde möglich?

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \underline{45}$$

Ungeordnete Stichproben (Kombinationen) ohne Zurücklegen

A6 Wieviele 5-stellige Zahlen mit voneinander verschiedenen Ziffern lassen sich mit den Ziffern $0, 1, 2, \dots, 7$ bilden, die die Ziffer 4 enthalten?

$$4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

$$x_1 4 x_3 x_4 x_5 - 0 4 x_3 x_4 x_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

$$x_1 x_2 4 x_4 x_5 - 0 x_2 4 x_4 x_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

$$x_1 x_2 x_3 4 x_5 - 0 x_2 x_3 4 x_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 4 - 0 x_2 x_3 x_4 4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

$$\Rightarrow 840 + 720 + 720 + 720 + 720 = \underline{3720}$$

A7 3 gleiche Kugelschreiber bzw. 4 Gutscheine im gleichen Wert werden 7 Personen geschenkt. Auf wieviele Arten kann man die Kugelschreiber und Gutscheine verschenken, wenn jede Person entweder einen K oder einen G erhält?

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \underline{35} \quad \binom{7}{3} \quad (\text{Permutation mit Wdh})$$

A8 Auf wieviele Arten kann man aus 6 Frauen und 8 Männern einen Ausschuss aus 3 Frauen und 4 Männern auswählen?

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \binom{6}{3} \binom{8}{4} = \underline{1400}$$

A9 In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann. Wieviele Beleuchtungsarten gibt es, wenn:

a) genau 5 Lampen brennen sollen?

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} = \binom{8}{5} = \underline{56} \quad (\text{Kombinationen ohne zurücklegen})$$

b) mindestens 5 Lampen brennen sollen?

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \underline{93}$$

Kombinatorik 1

A10 Wie viele Wege vom Punkt $P(0/0)$ nach $(8/8)$ über $(4/4)$ gibt es in einem Gitternetz mit Maschenlänge 1?

1 in x Richtung: 0

1 in y Richtung: 1

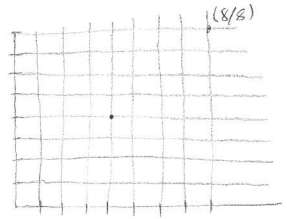
Von $(0/0)$ nach $(4/4)$: 11110000 [4 1sen und 4 0en]

$$\rightarrow \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

Von $(4/4)$ nach $(8/8)$: 11110000

$$\rightarrow \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

$$\Rightarrow 70 \cdot 70 = \underline{4900} \quad \left[\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{4} = 4900 \right]$$



AM 9 Touristen sollen auf drei Boote Nr. 1, 2, 3 verteilt werden. Auf wieviele Arten geht das, wenn gefordert wird, dass in jedes Boot mind. 2 und max. 4 Personen kommen?

Nr 1	Nr 2	Nr 3	Anz. Permutationen
2	3	4	$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!}$
2	4	3	"
3	2	4	"
3	4	2	"
4	2	3	"
4	3	2	"
3	3	3	$\frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$

$$\Rightarrow 6 \cdot \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} + \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \underline{9240}$$

Schubfachprinzip

Die Dezimalbruchdarstellung (DBD) einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ ist, falls nicht abbrechend, immer periodisch.

$$a = 119909901013$$

$$b = 990000000000$$

1. Schritt: $10a = m_1 \cdot b + r_1$, $1 \leq r_1 < b$, Also $m_1 = 1$, $r_1 = 209099010130 \rightarrow 0,1$

2. Schritt: $10r_1 = m_2 \cdot b + r_2$, $1 \leq r_2 < b$, Also $m_2 = 2$, $r_2 = 110990101300 \rightarrow 0,12$

3. Schritt: $10r_2 = m_3 \cdot b + r_3$, $1 \leq r_3 < b$, Also $m_3 = 1$, $r_3 = 119901013000 \rightarrow 0,121$

4. Schritt: $10r_3 = m_4 \cdot b + r_4$, $1 \leq r_4 < b$, Also $m_4 = 1$, $r_4 = 209010130000 \rightarrow 0,1211$

5. Schritt: $10r_4 = m_5 \cdot b + r_5$, $1 \leq r_5 < b$, " $m_5 = 2$, $r_5 = 110101300000 \rightarrow 0,12112$

6. " : $10r_5 = m_6 \cdot b + r_6$, $1 \leq r_6 < b$, " $m_6 = 1$, $r_6 = 111013000000 \rightarrow 0,121121$

7. " : $10r_6 = m_7 \cdot b + r_7$, $1 \leq r_7 < b$, " $m_7 = 1$, $r_7 = 120130000000 \rightarrow 0,1211211$

8. " : $10r_7 = m_8 \cdot b + r_8$, $1 \leq r_8 < b$, " $m_8 = 1$, $r_8 = 211300000000 \rightarrow 0,12112111$

9. " : $10r_8 = m_9 \cdot b + r_9$, $1 \leq r_9 < b$, " $m_9 = 2$, $r_9 = 133000000000 \rightarrow 0,12112112$

10. " : $10r_9 = m_{10} \cdot b + r_{10}$, $1 \leq r_{10} < b$, " $m_{10} = 1$, $r_{10} = 340000000000 \rightarrow 0,121121121$

11. " : $10r_{10} = m_{11} \cdot b + r_{11}$, $1 \leq r_{11} < b$, " $m_{11} = 3$, $r_{11} = 430000000000$ gleich $\rightarrow$ Periodizität $\rightarrow 0,1211211213$

12. " : $10r_{11} = m_{12} \cdot b + r_{12}$, $1 \leq r_{12} < b$, " $m_{12} = 4$, $r_{12} = 340000000000 \rightarrow 0,12112112134$

$\rightarrow$ Periodisch mit Periode 34

Bsp1: 2,4

Geg: m ganze natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m$. Es gibt eine Teilfolge aufeinanderfolgender

Glieder: $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_L$ $0 \leq k < L \leq m$, so dass $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_L$ durch m teilbar ist.

$\xrightarrow{PS}$ Partialsummen bilden: $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1+a_2+\dots+a_m$

Falls eine dieser PS durch m teilbar $\rightarrow$ Aussage bewiesen $\rightarrow$ Annahme: keine durch m teilbar

$\rightarrow a_1+a_2+\dots+a_i = n_i \cdot m + r_i$ $0 < r_i < m$ $1 \leq i \leq m \rightarrow r_i$ kann $1, 2, \dots, m-1$ sein $\rightarrow$ wir haben aber m - PS

$\rightarrow$ 2 Reste gleich $\rightarrow k$ und l mit $1 \leq k < l \leq m$ und $r_k = r_l = r$

$\rightarrow a_1+a_2+\dots+a_k = n_k \cdot m + r$, $a_1+a_2+\dots+a_l = n_l \cdot m + r \rightarrow$ Gleichungen subtrahieren

$\Rightarrow a_{k+1}+\dots+a_l = n_l \cdot m - n_k \cdot m = (n_l - n_k) \cdot m \rightarrow m$ Teiler von $a_{k+1}+\dots+a_l$

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \\ -3 & 4 & -12 & 2 & 6 & \end{array} \quad m=5$$

$$s_1 = -3 \quad -3 = (-1) \cdot 5 + 2 = r_1$$

$$s_2 = 1 \quad 1 = 0 \cdot 5 + 1 = r_2$$

$$s_3 = -11 \quad -11 = -3 \cdot 5 + 4 = r_3$$

$$s_4 = -7 \quad -7 = -2 \cdot 5 + 1 = r_4$$

$$s_5 = -3$$

sind gleich

$$\begin{array}{cccc} s_4 & & s_2 & \\ a_1+a_2+a_3+a_4 & = & a_1+a_2 & = a_3+a_4 \end{array} \rightarrow \text{ist teilbar durch } 5$$

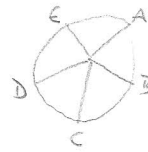
$$-12+2 = -10 \rightarrow -10 : 5 = -2$$

Kombinatorik 2

A1 Auf wie viele Arten können 5 Personen um einen runden Tisch sitzen?

$$\frac{5!}{5} = 4! = \underline{\underline{24}}$$

$$\begin{cases} ABCDE = BCDEA = CDEAB = DEABC \\ = EABCD \end{cases}$$



A2 Auf wieviele Arten können 12 Personen an zwei runde, unterscheidbare Tische zu je 6 Plätzen gesetzt werden?

Aufteilung der 12 Personen auf zwei unterscheidbare Tische zu je 6 Plätzen ist wie eine Partition einer Menge von 12 Elementen in zwei gleich grosse Teilmengen.

Die Anz. Partitionen ist $\frac{12!}{6! \cdot 6!} = \binom{12}{6}$. Zu jeder Partition werden die 6 Personen aus den Teilmengen um die runden Tische gesetzt. Die Anz. solcher Platzierungen ist $5! \cdot 5!$. Also total $\binom{12}{6} \cdot 5! \cdot 5! = 13305600$

A3 wie viele Mannschaften kann ein Trainer bilden, wenn er

10 Feldspieler und einen Torhüter benötigt, und der Club aus 17 Feldspielern und 3 Torhütern besteht?

$$\frac{17 \cdot 16 \dots 8}{10!} \cdot \frac{3}{1!} = \binom{17}{10} \cdot \binom{3}{1} = \underline{\underline{58344}}$$

A4 Auf wieviele Arten kann man aus 10 Personen eine 4er und zwei 3er Jassmannschaften bilden? Die 3er Mannschaften sind nicht zu unterscheiden.

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 4200$$

Aber 3er M. sind nicht unterscheidbar
dann: $\frac{1}{2} \binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{3} = \underline{\underline{2100}}$

A5 Gleich wie A4 ABER: wobei eine Mannschaft an die Schweizer-, die andere an die Bündner Jassmannschaft geht?

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = \binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{3} = \underline{\underline{4200}}$$

A6 Bestimme die Anzahl Partitionen einer 29-elementigen Menge mit 5 Teilmengen zu 4, 5, 3, 7 resp. 10 Elementen.

$$\frac{29!}{10! \cdot 7! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!} = \underline{\underline{2797702383 \cdot 10^{16}}} = \binom{29}{4} \binom{25}{5} \binom{20}{3} \binom{17}{7} \binom{10}{10}$$

A2 Tisch 1: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) / 6$

Tisch 2: $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / 6 \rightarrow 5!$

$\rightarrow$ Tisch 1 $\cdot$ Tisch 2 (weil sie sich unterscheiden)

$$\rightarrow 5! \cdot (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) / 6 = \underline{\underline{13305600}}$$

A7 Eine 4m breite und 2,5m hohe Wand wird mit Folienstreifen vertikal überklebt. Es stehen 3 verschiedenfarbige Streifen der Länge 2,5m und der Breite 1m zur Verfügung. Wieviele Farbmuster sind denkbar?

Es hat für 4 Streifen Platz, also $3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{\underline{3024}}$

A8 Zur Überdeckung der 19 leeren Quadrate stehen 2 rote, 3 gelbe und beliebig viele blaue, quadratische Platten zur Verfügung. Der markierte Teil wird nicht überdeckt. Bestimme die Anzahl der möglichen Farbmuster. Dabei müssen nicht zwingend 2 rote und 3 gelbe Platten verwendet werden.

$$\begin{aligned} & \frac{19!}{2!3!14!} + \frac{19!}{2!2!15!} + \frac{19!}{2!1!16!} + \frac{19!}{2!0!17!} + \frac{19!}{1!3!15!} + \frac{19!}{1!2!16!} + \frac{19!}{1!1!17!} + \frac{19!}{1!0!18!} \\ & + \frac{19!}{0!3!16!} + \frac{19!}{0!2!17!} + \frac{19!}{0!1!18!} + \frac{19!}{0!0!19!} = \underline{\underline{162546}} \end{aligned}$$

Kombinatorik 3

A1 Eine Person hat 4 Kleider, 9 Hüte und 10 Paar Schuhe. Auf wieviele Arten kann sie sich kleiden, wenn sie ein Kleid, einen Hut und ein Paar Schuhe tragen muss?

$$4 \cdot 9 \cdot 10 = \underline{\underline{360}}$$

A2 Eine Autokennzeichenbestandteile besteht aus 3 Buchstaben, gefolgt von 3 Ziffern. Wieviele solche Autokennzeichen gibt es?

$$26^3 \cdot 10^3 = \underline{\underline{17576000}}$$

A3 Auf wieviele Arten kann man 5 Hotelgäste in 10 freien Einzelzimmern unterbringen?

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{\underline{30240}} \quad (10! : 5!)$$

A4 Es seien A, B, C, D vier Dörfer. Von A nach B führen 3 Wege, von B nach C fünf und von C nach D vier Wege.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, von A nach D zu wandern?

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{60}}$$

b) Von A nach D und wieder zurück?

$$3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = \underline{\underline{3600}} \quad (60^2)$$

A5

a) Wie viele verschiedene, siebenstellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, ..., 7 bilden, wenn in jeder Zahl jede Ziffer nur einmal auftreten darf?

$$7! = \underline{\underline{5040}}$$

b) Wieviele dieser Zahlen beginnen mit 7?

$$7 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \rightarrow 6! = \underline{\underline{720}}$$

c) Wieviele dieser Zahlen beginnen mit 3 und enden mit 1?

$$3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 1 \rightarrow 5! = \underline{\underline{120}}$$

d) Wieviele dieser Zahlen sind grösser als 4'000'000?

$$4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \quad 5 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \quad 6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \quad 7 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 6! = \underline{\underline{2880}}$$

e) Wieviele dieser Zahlen sind kleiner als 5'300'000?

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 & 5 \times 1 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 & 4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 & 3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 & 2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \\ 5! & 5! & 6! & 6! & 6! & 6! \end{array}$$

$$4 \cdot 6! + 2 \cdot 5! = \underline{\underline{3120}}$$

A6 Wieviele versch. sechsstellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5 bilden, wenn in jeder Zahl jede Ziffer nur einmal auftreten darf?

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 &= 6! \\ 0 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 &= 5! \end{aligned} \Rightarrow 6! - 5! = \underline{\underline{600}}$$

b) Wieviele dieser Zahlen sind gerade?

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 0 &= 5! \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 2 &= 5! \\ x_1 \dots x_5 4 &= 5! \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 0 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 2 \\ x_1 \dots x_5 4 \end{aligned}} \right\} 3 \cdot 5! = 360$$

$$\begin{aligned} 0 x_2 \dots x_5 2 &= 4! \\ 0 x_2 \dots x_5 4 &= 4! \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 x_2 \dots x_5 2 \\ 0 x_2 \dots x_5 4 \end{aligned}} \right\} 48$$

$$\Rightarrow 360 - 48 = \underline{\underline{312}}$$

A7 Stelle die Permutationen der Elemente b, e, i, l in lexikographischer Reihenfolge dar.

beil beli blei blie biel bile
 eblí ebíl elbí elíb eíbl eílb
 lbei lbie lebi leíb líbe líeb
 íbel íble íebl íelb ílbe íleb

A8 Die Permutationen der 7 Elemente a, b, c, d, e, f, g seien in lexikogr. Reihenfolge zusammengestellt worden. Wie lautet die 1695-te Permutation?

Finden durch Eingrenzung:

$$\begin{aligned} a x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 &= 6! = 720 \rightarrow \text{zu wenig} \\ b x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 &= 6! = 720 \rightarrow \text{total } 2 \cdot 720 = 1440 \rightarrow \text{zu wenig} \\ c x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 &= 6! = 720 \rightarrow \text{total } 3 \cdot 720 = 2160 \rightarrow \text{zu viel} \\ c a x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 &= 5! = 120 \rightarrow 1440 + 120 = 1560 \rightarrow \text{zu wenig} \\ c b x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 &= 5! = 120 \rightarrow \text{total } = 1680 \rightarrow \text{zu wenig} \\ c d x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 &= 5! = 120 \rightarrow \text{total } = 1800 \rightarrow \text{zu viel} \\ c d a x_4 x_5 x_6 x_7 &= 4! = 24 \rightarrow \text{total } = 1704 \rightarrow \text{zu viel} \\ c d a b x_5 x_6 x_7 &= 3! = 6 \rightarrow \text{total } = 1686 \rightarrow \text{zu wenig} \\ c d a e x_5 x_6 x_7 &= 3! = 6 \rightarrow \text{total } = 1692 \rightarrow \text{zu wenig} \\ c d a f x_5 x_6 x_7 &= 3! = 6 \rightarrow \text{total } = 1698 \rightarrow \text{zu viel} \\ c d a f b x_6 x_7 &= 2! = 2 \rightarrow \text{total } = 1694 \rightarrow \text{zu wenig} \\ c d a f e x_6 x_7 &= 2! = 2 \rightarrow \text{total } = 1696 \rightarrow \text{zu viel} \\ c d a f e b x_7 &= 1! = 1 \rightarrow \text{total } = 1697 \rightarrow \text{gefunden!} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{cdafebg}}$

b) Die wievielte Permutation ist dbeafgc?

$$\begin{aligned} a x_2 \dots x_7 &= 6! = 720 ; b x_2 \dots x_7 = 6! = 720 ; c x_2 \dots x_7 = 6! = 720 \rightarrow 3 \cdot 720 = 2160 \\ d a x_3 \dots x_7 &= 5! = 120 ; d b a x_4 \dots x_7 = 4! = 24 ; d b c x_5 \dots x_7 = 4! = 24 \rightarrow 2160 + 120 + 2 \cdot 24 = 2328 \\ d b e a c x_6 x_7 &= 2! = 2 ; d b e a f c x_7 = 1! = 1 ; d b e a f g c = 0! = 1 \\ \Rightarrow 2328 + 2 + 1 + 1 &= \underline{\underline{2332}} \end{aligned}$$

A9 Aus 5 Franz., 10 Engländern und 6 Deutschen sollen 2 Personen verschiedener Nationalität ausgewählt werden. Auf wie viele Arten geht das?

$$5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = \underline{\underline{140}}$$