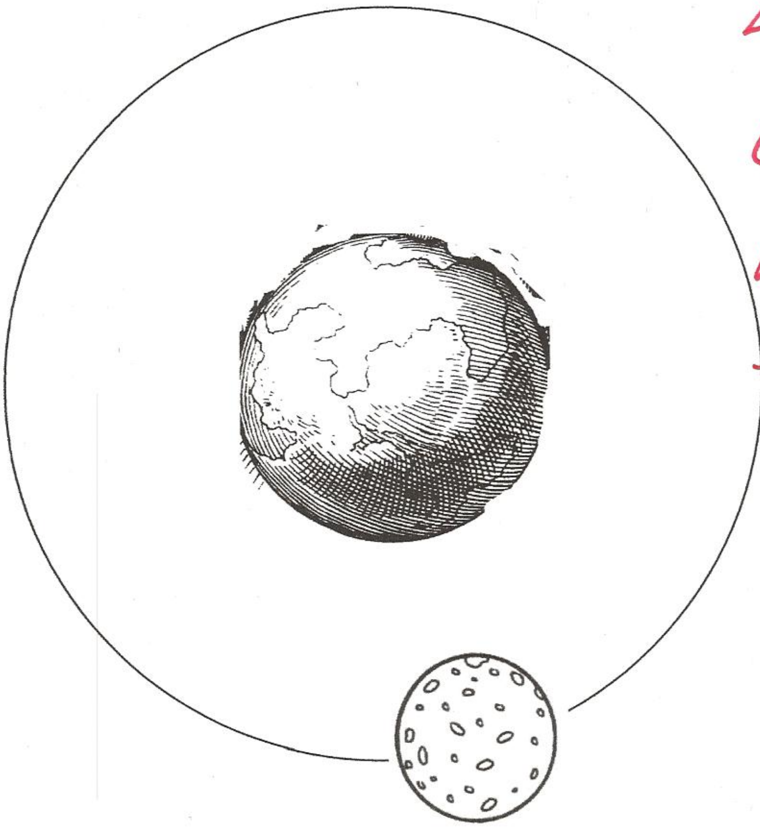
Simulation eines Zweikörperproblems

anhand des Beispiels der beiden Körper Erde und Mond

ZP

Gut! Dokumentieren Sie Resultate mit Diagrammen!



Studiengang:	Informatik
Fach:	PHIT1
Autor:	Simon Flüeli, IT10b

Auftrag 1: Simulation eines Zweikörperproblems

Die Aufträge 1-4 sind handschriftlich zu bearbeiten. Die Bearbeitungen werden bewertet (Nicht abgegeben = 0 Punkte, ungenügende Bearbeitung = 1 Punkt, Bearbeitung in Ordnung = 2 Punkte). Für hervorragende Bearbeitungen kann + 1 Bonuspunkt vergeben werden. Wichtig für die Bearbeitung ist, dass die eigenen Ideen, Konzepte und Gedanken in geeigneter Weise dokumentiert werden. Im Vordergrund steht nicht ein einfaches Resultat, sondern die Auseinandersetzung mit den Konzepten. Abgabetermin: Mi. 26. Okt. IT10a in der Vorlesung, IT10b in den Übungen.

Einleitung: Bei einem Zweikörperproblem werden zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 betrachtet, welche miteinander wechselwirken. Ein Beispiel dafür ist das System Erde – Mond (sofern es isoliert betrachtet wird!), bei dem die beiden Himmelskörper sich über die Gravitation gegenseitig beeinflussen (anziehen). Ziel des Auftrags ist (1) ein Modell für ein solches System zu entwickeln und in einer Computersimulation zu testen, (2) das Verhalten der Simulations-resultate bezüglich numerischen Problemen qualitativ und soweit möglich quantitativ zu beschreiben und (3) der Einfluss verschiedener Wechselwirkungsgesetzte auszuprobieren.

A. Modellierung: Finden Sie die Systemgleichungen, welche die Bewegung von zwei Körpern in zwei Dimensionen ($\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$) beschreiben. Welche Wahl des Koordinatensystems ist günstig?

B. Setzen Sie die Systemgleichungen (A) in ein Flussdiagramm für einen graphischen Modelleditor (Berkeley-Madonna) um (Handskizze).

C. Implementieren Sie das Modell in einen graphischen Modelleditor (Berkeley-Madonna) und simulieren Sie die Bewegung von Mond und Erde für verschiedene Zeitschritte und nummerische Verfahren (Euler, RK2, RK4): was fällt auf? Welchen Zusammenhang (qualitativ und quantitativ) beobachten Sie zwischen den Bahnkurven und der Zeitschrittgrösse?

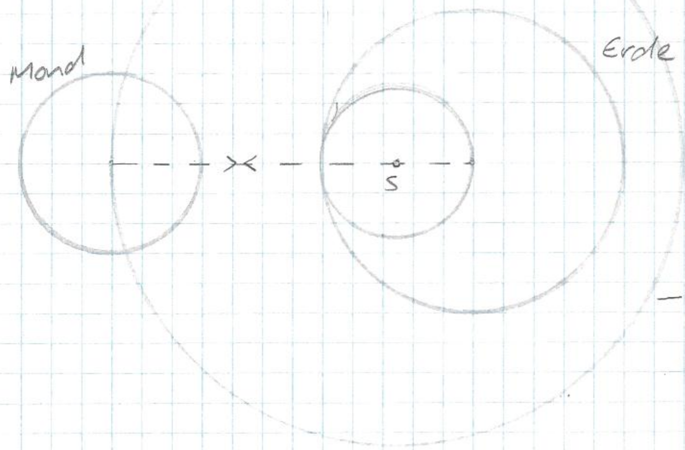
D. Was geschieht, wenn Sie anstelle eines $1/r^2$-Gesetztes eine andere Potent verwenden (z.B. $1/r^3$)? Lässt sich eine Regel (Vermutung) formulieren?

Simon Flüeli, IT1ob

PHIT - Auftrag 1: Zweikörperproblem

Beim nachfolgenden Zweikörperproblem werden die beiden Körper Erde und Mond isoliert betrachtet.

Situationsskizze



- Die Mondumlaufbahn wurde zur einfacheren Darstellung rund statt Elliptisch gezeichnet

A: Modellierung

Gegeben:

$m_{Erde} = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg

$m_{Mond} = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg

Abstand: 384400 km $\Rightarrow d = 384400000$ m (Durchschnitt)

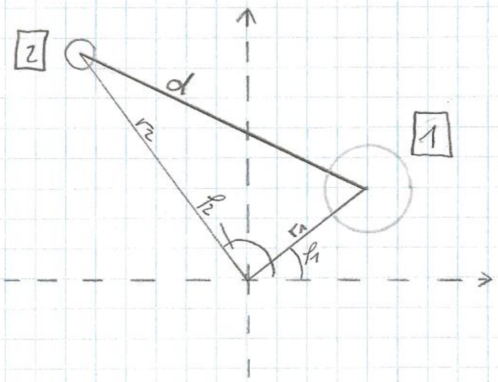
Anziehungskraft zwischen Erde und Mond:

$((m_{Erde} \cdot m_{Mond}) / (d^2)) \cdot 6,6731 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2 = 1,98 \cdot 10^{20}$ N

Interpretation: Würde die Anziehungskraft zwischen der Erde und dem Mond nicht existieren, würden die beiden Körper sich immer weiter voneinander weg bewegen. Würde jedoch nur die Anziehungskraft existieren, würden sich die Erde und der Mond aufeinander zu bewegen mit steigender Geschwindigkeit, je kleiner der Abstand wird.

Da beide dieser Tatsachen nicht der Fall sind, muss eine weitere Kraft auf die Körper einwirken, die Zentripetalkraft. Diese muss gleich gross sein wie die Anziehungskraft.

Was bei der Berechnung der Anziehungskraft ausser Acht gelassen wurde, ist die Tatsache, dass der Abstand zwischen den Körpern aufgrund der elliptischen Umlaufbahn nicht konstant ist.
Aus diesem Grund muss eine Formel gefunden werden, welche den Abstand beschreibt.
Hierzu schauen wir uns das <u>Polarkoordinatensystem</u> genauer an.



$\boxed{1}$ - Erde = $x(t)$

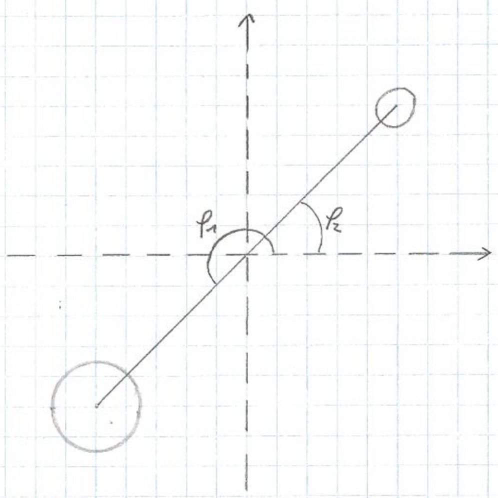
$\boxed{2}$ - Mond = $y(t)$

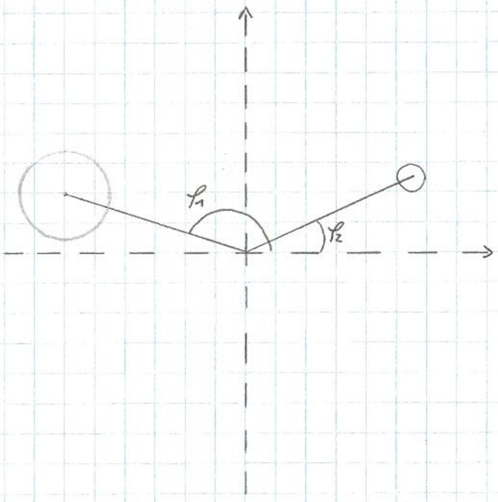
$x(t)$ und $y(t)$ lassen sich beide durch r und φ ausdrücken.

Mit Hilfe des Cosinus-Satzes kann der Abstand d wie folgt definiert werden:

$$\boxed{d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

Zur Verifikation dieser Formel wurden verschiedene Stellungen von Erde und Mond getestet:

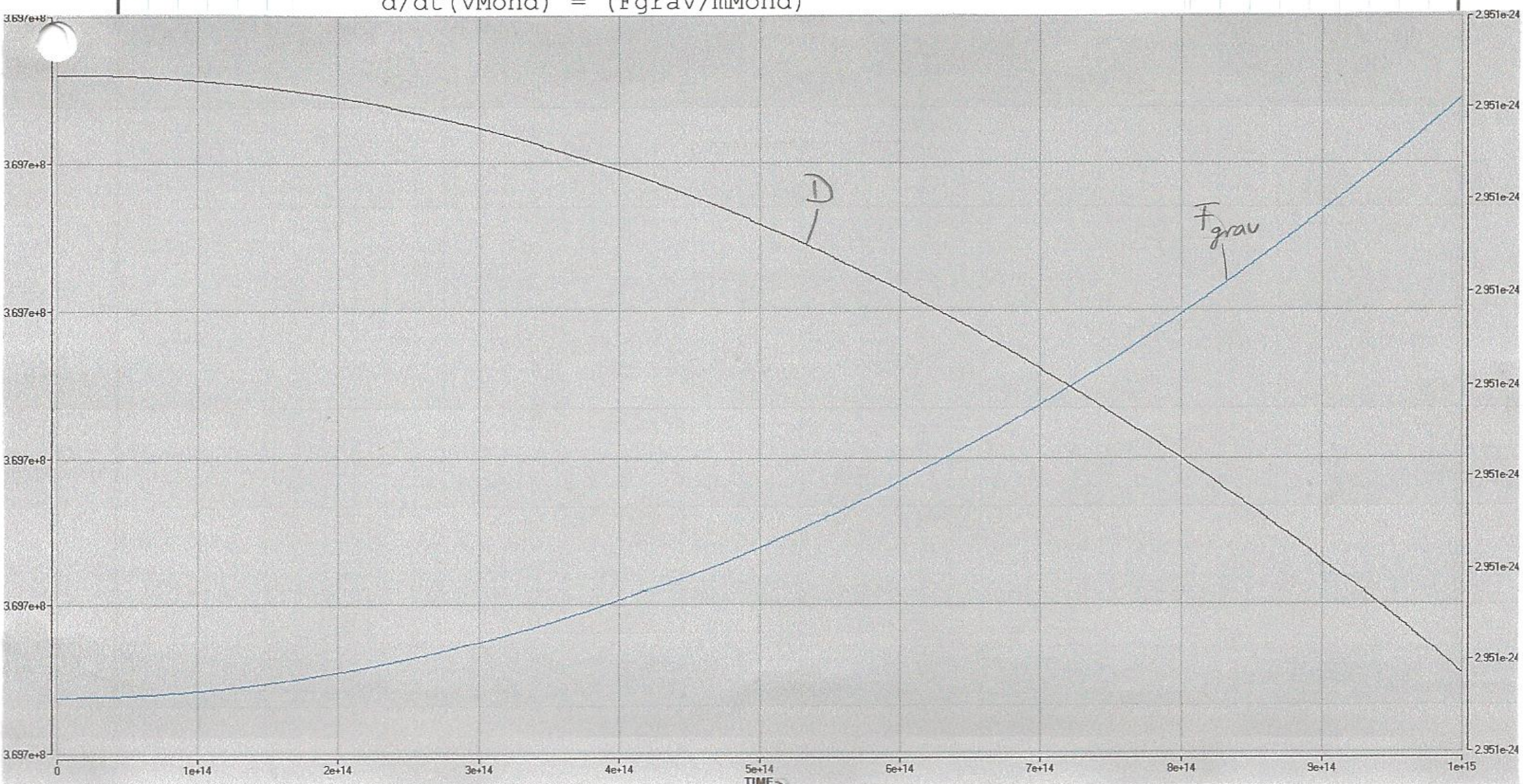


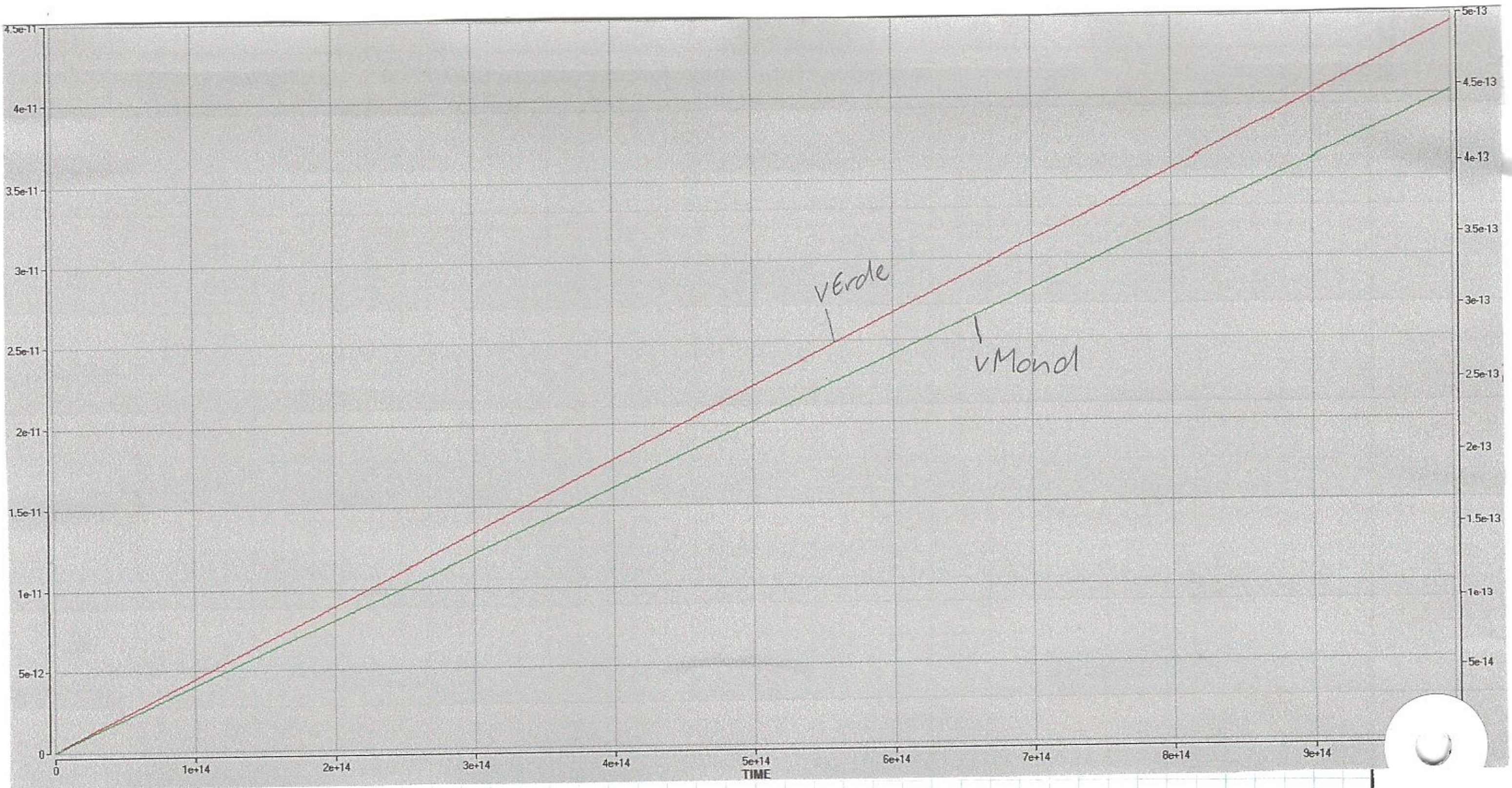


Simon Flüeli, IT10b

Zur Simulation der Anziehungskraft zwischen Erde und Mond und somit auch des Abstandes wurde Berkeley Madonna zur Hilfe genommen. Bei der Simulation wurde die Zentripetalkraft ausser Acht gelassen, so dass der Abstand der Erde zum Mond immer kleiner wird.

```
METHOD RK4

STARTTIME = 0
STOPTIME=1000000000000000
DT = 1000000000000000*10^(-3)

; *******************************************
; Information: The units are m, kg, N, s
; *******************************************

; *********************************
; Define and initialize variables
; *********************************
init D = 369698*10^3
init vErde = 0
init vMond = 0
mErde = 5.97*10^3
mMond = 7.34*10^1
constGrav = 6.6731*10^-11

;D = (r1^2 + r2^2 - 2*r1*r2 * cos(phi1-phi2))^0.5
Fgrav = ((mErde+mMond)/(D^2)) * constGrav

; *********************************
; Define differential equation
; *********************************
d/dt(d) = -(vErde+vMond)
d/dt(vErde) = (Fgrav/mErde)
d/dt(vMond) = (Fgrav/mMond)
```





Bei dieser Simulation fehlt, wie bereits erwähnt, die Zentripetalkraft. Diese soll nachfolgend berechnet werden:
Als Erstes wird die Winkelgeschwindigkeit benötigt.

ω_{Erde}

Info: Die Erde macht in 24 Stunden mehr als 360°, weshalb der Sterntag (86164s) anstelle des Sonnentages für die Berechnung verwendet werden müsste. Zur Vereinfachung wird nachfolgend angenommen, dass die Erde in 24 Stunden genau 360° zurücklegt.

$\rightarrow 2\pi / 86400s = \underline{7{,}27 \cdot 10^{-5} s^{-1}}$

ω_{Mond}

Info: Vereinfacht wird angenommen, dass der Mond für eine Umdrehung 29 Tage braucht.

$\rightarrow 2\pi / 2505600s = \underline{2{,}51 \cdot 10^{-6} s^{-1}}$

Weiters wird für die Zentripetalkraft die Bahngeschwindigkeit gebraucht:

Info: Vereinfachend wird angenommen, dass die Erde selber der Schweremittelpunkt ist und der Mond sich also um die Erde dreht. Somit folgt:
r (Schweremittelpunkt bis Mond) = d (Abstand Erde-Mond)

$\rightarrow \quad v = \omega \cdot r \qquad (r = 384400000 m)$

$v = 2{,}51 \cdot 10^{-6} s^{-1} \cdot 384400000 m$

$\underline{v = 964{,}8 m/s = 0{,}9648 km/s}$

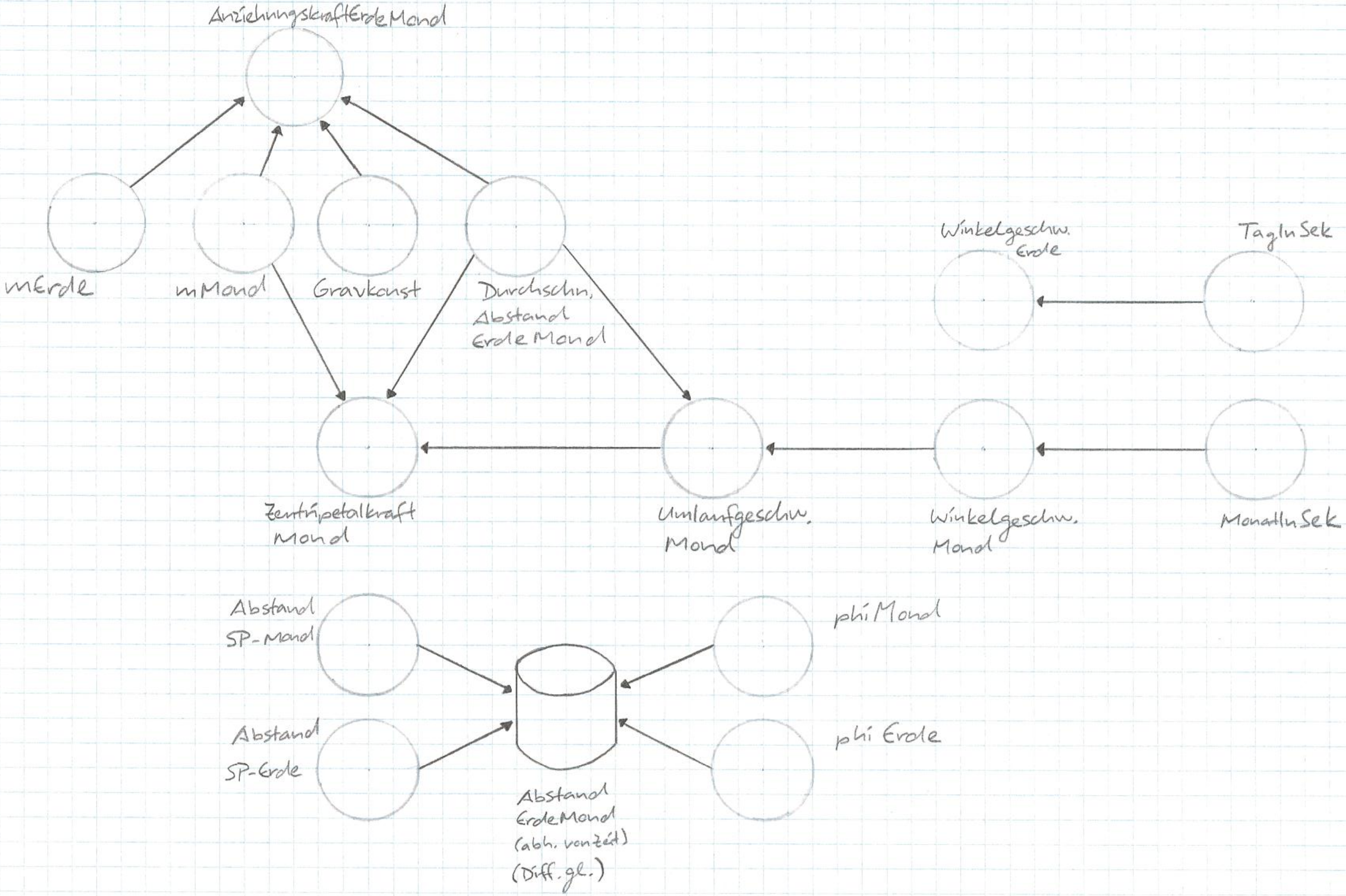
Die Zentripetalkraft des Mondes beträgt demnach:

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} kg \cdot (964{,}8 m/s)^2}{384400000 m} = \underline{1{,}78 \cdot 10^{20} N}$$

Zur Kontrolle:

$$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r = 7{,}35 \cdot 10^{22} kg \cdot (2{,}51 \cdot 10^{-6} s^{-1})^2 \cdot 384400000 m = \underline{1{,}78 \cdot 10^{20} N}$$

B) Flussdiagramm der Systemgleichungen



Simon Flüeli, IT10b

c) Die Simulation in Berkeley Madonna umgesetzt hat leider nicht wie gewünscht funktioniert. Nach Rücksprache mit meinen Kommilitonen habe ich gemerkt, dass viele mit der Simulation in Berkeley Madonna nicht zurechtkommen. Wäre es evtl. möglich, dies im Unterricht zusammen zu lösen?

Ich habe mich trotzdem über die verschiedenen numerischen Verfahren Euler, RK2 und RK4 und ihr Verhalten bei unterschiedlichen Zeitschritten informiert:

Bei sehr kleinen Zeitschritten (z.B. 1sec bei der Erde-Mond Simulation) würden alle drei Verfahren ungefähr dasselbe Resultat mit einer identischen Genauigkeit liefern.
Je grösser jedoch die Zeitschritte gewählt werden, scheint die Genauigkeit zu sinken.
Das Eulersche Verfahren zeigt schon sehr schnell Ungenauigkeit auf. Auch das RK2 Verfahren ist bei mittelgrossen Zeitschritten nicht mehr ganz akkurat.
Das RK4 Verfahren schneidet bei der Genauigkeit mit grossen Zeitschritten am besten ab. Es ist aber auch das zeitintensivste Verfahren.

G

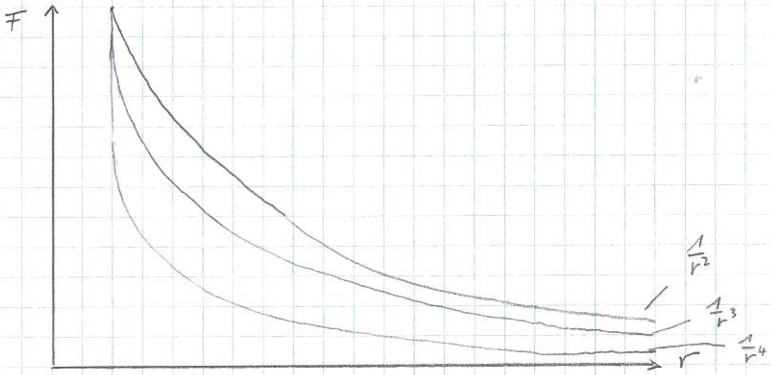
D) Für die folgende Erklärung wird eine Annahme gemacht:

Annahme: $F = \frac{1}{r^2}$

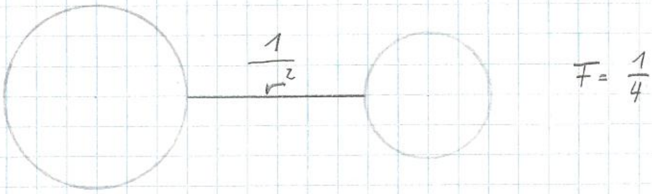
Beispiel: $r = 2$

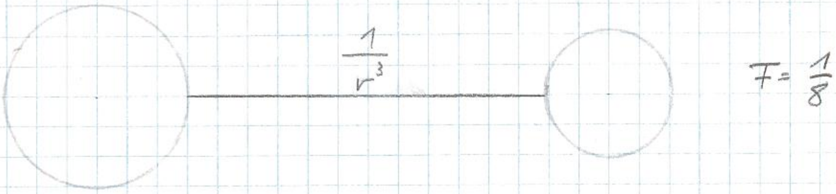
① $F = \frac{1}{r^2} \rightarrow F = \frac{1}{4}$

② $F = \frac{1}{r^3} \rightarrow F = \frac{1}{8}$



Je grösser die Potenz gewählt wird, desto kleiner wird die wirkende Kraft.





Würde der Exponent im Gravitationsgesetz leicht verändert werden, hätte dies drastische Auswirkungen auf die Kreisbahn des Mondes. Mit einem Exponent von 2,9 würde die Umlaufbahn ungefähr so aussehen: