

MLAT Zusammenfassung

Simon Flüeli

$n \times m$ - Matrix : n - Spalten; m - Zeilen

$$3 \times 2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Element a_{ij} : i -te Zeile ; j -te Spalte

$$a_{21} = 2$$

Transponieren einer Matrix

- Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

Eine quadr. Matrix D heisst Diagonalmatrix, wenn die Elemente $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrix

Eine quadr. Matrix heisst Einheitsmatrix, wenn für die Elemente e_{ij} von E_n gilt:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i=j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symmetrisch

Eine quadr. Matrix heisst symmetrisch, wenn $A = A^T$

Schiefsymmetrisch

$$A = -A^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Spur

Summe d. Diagonalelemente $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

Nullmatrix

Alle Elemente sind 0

Addition

$$J + A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 15 & 20 \\ 45 & 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 18 & 31 \\ 52 & 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 33 & 51 \\ 97 & 132 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

$$2J = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 15 & 20 \\ 45 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 30 & 40 \\ 90 & 128 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften d. Add. & Skal. Multiplik.

1. Kommutativgesetz $A + B = B + A$

2. Assoziativgesetz $(A + (B + C)) = (A + B) + C$

3. $A + (-A) = 0_{n \times n}$; $-A$ = Inverse von A

4. $1 \cdot A = A$

11. $A + 0 = A = 0 + A$

5. $0 \cdot A = 0_{n \times n}$

12. $(u \cdot v) \cdot A = u(v \cdot A)$

6. $(st) \cdot A = s(tA) = stA$

13. $(u+v) \cdot A = uA + vA$

7. $s(A+B) = sA + sB$

14. $u(A+B) = uA + uB$

8. $(A+B)^T = A^T + B^T$

9. $(sA)^T = sA^T$

10. $(A^T)^T = A$

Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor : Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^T \cdot y = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\text{Bspl.: } \vec{x} \cdot \vec{y} = x^T \cdot y = (1 \ 2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

Multiplikation v. Matrizen

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$\begin{matrix} & A & & B \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ & & & C \\ & & & \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 11 \\ 13 & 17 \end{bmatrix} \end{matrix} = C$$

Invertierbare Matrix (nur möglich wenn $\det \neq 0$)

Ist A eine quadr. Matrix, dann heisst A invertierbar, wenn es eine quadr. Matrix B derselben Dimension gibt, sodass gilt: $A \cdot B = B \cdot A = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix derselben Dimension ist. B heisst die Inverse von A , $\Rightarrow B = A^{-1}$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Beispiele

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-5) = 1$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 10 \\ -1 & 3 & 01 \\ \hline 2 & -5 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}1 \\ \hline 2 & 0 & 610 \\ 0 & 1 & 12 \\ \hline 1 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 12 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften d. Matrizenmultiplikation

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \rightarrow$ Assoziativgesetz

2. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda AB \rightarrow$ Multipl. mit Zahl

3. $A(B+C) = AB+AC$
 $(A+B)C = AC+BC$ } Distributivgesetz

4. $AE = EA = A$ falls A quadr.

5. $(AB)^T = B^T A^T$

6. $AB \neq BA \rightarrow$ NICHT kommutativ

Determinanten

2x2 - Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D$$

3x3 - Matrix

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Bei höheren Matrizen auf Form bringen:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Produkt aus Hauptdiagonale}$$

Satz:

1. Ein homogenes Gl. sys. hat immer mind. eine Lösung, nämlich $\vec{x} = \vec{0}$

2. Falls ein inhomogenes Gl. sys. Lösungen hat, so lässt sich der Lösungsraum wie folgt darstellen:

$$\vec{x} = \underbrace{a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + \dots + a_d \vec{x}_d}_{\text{Lsg. d. homogenen Gl. sys.}} + \underbrace{\vec{x}_s}_{\text{spez. Lsg. d. inhomogenen Gl. sys.}}, \quad a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}$$

Lineare Gleichungssysteme

Gauss-Jordan Algorithmus

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Elementare Zeilenoperationen

1. Zeilenaustausch: Vertauschen von 2 Zeilen

2. Skalierung: Multiplikation einer ganzen Zeile mit derselben nicht verschwindenden Zahl

3. Zeilenaddition: Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Homogene und inhomogene Gleichungsverfahren

Ein Gleichungssystem $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$

heißt homogen, falls $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{0}$ ist. Andernfalls ist es inhomogen

Beispiel: Lösen Sie das homogene System $A\vec{x} = \vec{0}$ mit 3 Gl. und 3 Unbekannten mit d. Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Wenn man Matrix auf Dreiecksform bringt, merkt man, dass das}$$

System genau eine Lösung hat, nämlich $\vec{x} = \vec{0}$.

Diese Lösung heißt triviale Lösung.

Bemerkung: Ein homogenes, lineares Gl. sys. ist immer lösbar, da es immer die triviale Lösung besitzt.

Beispiel

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 5 & 16 & | & 7 \end{pmatrix}$$

2. → Erste Spalte, die nicht aus lauter 0 besteht ermitteln (Pivotspalte). Dann das erste Element, das $\neq 0$ ist durch Zeilenantausch auf oberste Zeile bringen (Pivotposition) → $I \leftrightarrow II$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & | & 5 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 5 & 16 & | & 7 \end{pmatrix}$$

3. → Alle Elemente unterhalb Pivotposition 0 machen $III - 6 \cdot I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & -13 & 10 & | & 13 \end{pmatrix}$$

4. → Ignoriere die schon erhaltenen Pivotzeilen und wiederhole die Schritte 2-4 an der restlichen Teilmatrix $III - 3 \cdot II$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

5. → Normiere das unterste Pivotelement durch Skalierung der Pivotzeile $\frac{1}{2} III$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

6. → Machte alle Elemente oberhalb des untersten Pivotelementes durch Zeilenaddition zu 0

$II + 5 \cdot III$ und $I - 3 \cdot III$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 12 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

7. → Normiere das zweit unterste Pivotelement durch Skalierung der entsprechenden Zeile $\frac{1}{2} II$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

8. → Machte alle Elemente oberhalb des zweit untersten Pivotelementes zu 0

$I + II$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Das ist die reduzierte Dreiecksform.

In der reduzierten Δ -Form lautet das zugeh. Gl. sys.:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_3 - 2x_4 + 6x_6 = 0 \\ x_5 + 2x_6 = -1 \end{cases}$$

Als Lösung erhalten wir:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ 1. x_2, x_3, x_5 heißen Basis- / Grundvariablen der Lsg. Sie gehören zu den Pivotelemente der Matrix und sind nicht frei wählbar.

2. x_1, x_4, x_6 heißen freie Variablen der Lsg. Sie kommen in der Lsg als Parameter vor und sind frei wählbar

3. Dieses Gl. sys. hat ∞ viele Lösungen

4. Ein Gl. sys., das lösbar ist, nennt man konsistent. Umgekehrt heißt ein Gl. sys., das unlösbar ist, inkonsistent

⇒ Zusammenfassend stellen wir fest, dass ein Gl. sys.:

- 1 Lösung
 - ∞ -viele Lösungen
 - keine Lösung
- haben kann.

Rang einer Matrix

1. Rang: Anzahl Zeilen, in der reduzierten Δ -Form, die nicht aus lauter 0 besteht

2. Rangdefekt: Ergänzung d. Rangs zur Anz. Spalten

Bspl.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Rang } Rg(A) = 2$$

Lösungskriterien

1. $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist konsistent (lösbar)

2. Der Rang der erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$ ist gleich dem Rang von A

3. In der reduzierten Δ -Form von $(A|\vec{b})$ gibt es keine Zeile, deren einziges nicht versch. Element sich in der letzten Spalte befindet

Inverse Matrix

Quadratische Matrizen mit maximalen Rang haben eine inverse Matrix.

$$A \cdot A^{-1} = E, \text{ also}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ kann man direkt die erweiterte Matrix $(A|E)$ in die reduzierte Δ -Form bringen und A^{-1} steht auf der rechten Seite

Inverse für 2×2 -Matrizen:

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}$$

$$(ad-bc) \neq 0$$

Eine Matrix, welche eine Zeile oder Spalte mit lauter 0en hat, kann nicht invertiert werden.

Orthogonale Matrizen: $A^T = A^{-1}$

$A \cdot B$ orth., falls A, B orth.

$$(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^T$$

I) alle Spalten sind paarweise ortho.

II) alle Zeilen sind paarweise ortho.

III) jede Spalte hat Länge 1

IV) jede Zeile hat Länge 1

Äquivalenzumformung:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad | \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}(A \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Lineare Gleichungssysteme

Nullzeilen und deren Bedeutung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Nullzeile} \Rightarrow \infty \text{ Lösungen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{inkonsistentes Gl. sys.} \\ \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Homogen & inhomogen #2

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{homogen: } \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{inhomogen: } \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\text{triviale Lsg: } \vec{x} = \vec{0}$$

Ein homogenes lineares Gl. sys. ist immer lösbar
 $\rightarrow$ triviale Lsg.

Falls mehr Lsg existieren, ist A nicht invertierbar

Gl. sys. mit mehreren Lösungen

A^{-1} existiert:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

A^{-1} ex., $\vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow$ inhomogen

genau 1 Lösung

A^{-1} existiert nicht:

$$A \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}$$

$$A \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}$$

$\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \Rightarrow 2 \text{ Lösungen}$
 A^{-1} ex. nicht

$$A \cdot \vec{x}_1 - A \cdot \vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0} \\ \neq \vec{0}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow A$ nicht invertierbar

$\Rightarrow \infty$ viele Lösungen

Vorbereitung Test 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A1: Elementare Operationen mit Matrizen

a) A^{-1}

1. Schritt: Prüfen ob Inverse möglich ($\det(A) \neq 0$): $1 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 = -2$

2. Schritt: Inverse berechnen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A^{-2} &= A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } B^T \cdot A & \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 2 & 0 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d) $A^{-1} \cdot (2A - B) \Rightarrow$ Nicht definiert weil $2A = 2 \times 2$ -Matrix und $B = 2 \times 3$ -Matrix $\rightarrow$ können nicht subtrahiert werden

A3: Diskussion eines linearen Systems

$$\text{Geg.: } \begin{cases} 2 \cdot (r+1)x_1 - r \cdot x_2 = r \\ -3 \cdot x_1 + (r-1) \cdot x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{mit den Unbekannten } x_1 \text{ und } x_2$$

Ges.: Für welche Werte von r besitzt das System i) 1 Lsg, ii) keine Lsg, iii) unendlich viele Lösungen?

In welcher Interpretation führen Sie die Diskussion durch (schneiden v. Geraden, zerlegen v. Spaltenvektoren, RREF)?

$$\begin{aligned} 2(r+1)x - ry &= r \\ -3x + (r-1)y &= 1 \end{aligned}$$

$2(r+1)$	$-r$	r
-3	$(r-1)$	1

$\rightarrow$ vertauschen

-3	$(r-1)$	1
$2(r+1)$	$-r$	r

$\leftarrow$ Pivotzeile

$-3 \quad (r-1)$	1
$0 \quad -r + \frac{2(r+1)(r-1)}{3}$	$r + \frac{2(r+1)}{3} \cdot 1$

↑ Um hier eine "0" stehen zu haben, musste Zeile 2 + $\frac{2(r+1)}{3} \cdot$ Zeile 1 gerechnet werden. → dies ist nun bei Spalte 2+3 der Zeile 2 analog durchgeführt worden.

$$\rightarrow -\frac{3r}{3} + \frac{2(r+1)(r-1)}{3} = \frac{-3r + 2(r+1)(r-1)}{3} = \frac{-3r + 2(r^2 - 1)}{3} = \frac{-3r + 2r^2 - 2}{3}$$

$$\rightarrow \frac{3r}{3} + \frac{2(r+1)}{3} = \frac{3r + 2r + 2}{3}$$

Nenne $\alpha = \frac{2r^2 - 3r - 2}{3}$, $\beta = \frac{5r + 2}{3}$

ii) keine Lösung, falls ① $\alpha = 0$, ② $\beta \neq 0$, da es dann heißt $0 = \text{etwas nicht gleich } 0$
 ↳ nicht möglich! (Bsp: $0 = 3$)

Bedingung ①: $\frac{2r^2 - 3r - 2}{3} = 0 \Rightarrow 2r^2 - 3r - 2 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{r_1 = 2}, \underline{r_2 = -\frac{1}{2}}$$

Bedingung ② ist für $r_1 = 2$ $\beta \neq 0$?

$$\beta = \frac{5r + 2}{3} \text{ mit } r=2 \Rightarrow \beta = \frac{5 \cdot 2 + 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

→ β ist also 4, d.h. $\neq 0$

→ $r_1 = 2$ ist also ein r , bei welchem das Gl. syst. keine Lösung hat!

ist für $r_2 = -\frac{1}{2}$ $\beta \neq 0$?

$$\beta = \frac{5r + 2}{3} = \frac{5 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2}{3} = \frac{-2,5 + 2}{3} = -\frac{0,5}{3} = -\frac{1}{6} \neq 0$$

→ auch $r_2 = -\frac{1}{2}$ erfüllt die beiden Bedingungen!

⇒ keine Lösung für $r=2$ und für $r=-\frac{1}{2}$

iii) ∞ -viele Lösungen wenn Gestalt $0 \cdot y = 0$, da das für alle $y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist!

Bedingungen: $\alpha = 0$, $\beta = 0$

$\alpha = 0$ für $r=2$ oder für $r=-\frac{1}{2}$

↳ Beide Bedingungen können, wie wir bereits bei ii) gesehen haben, nicht erfüllt werden!

⇒ ∞ -viele Lösungen sind nicht möglich!

Fortsetzung Aufgabe 3

i) genau eine Lösung: * wenn die Fälle ii) bzw. iii) nicht eintreten, dann tritt automatisch Fall i) ein!

$\Rightarrow$ für $r \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}$ gibt es genau eine Lösung

Geometrisch:

Die 2 Gleichungen bilden Funktionen (Graphen, Geraden) in der x - y -Ebene (od. x_1 - x_2 -Ebene)

- genau 1 Lösung: es gibt genau einen Schnittpunkt
- keine Lösung: es gibt keinen Schnittpunkt
- ∞ -viele Lösungen: Geraden fallen zusammen!

* : - genau eine Lösung für : $\alpha \neq 0$

- keine Lösung für : $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$

- ∞ -viele Lösungen für : $\alpha = 0$ und $\beta = 0$

A4: Berechnen Sie die folgende Determinante mit Hilfe einer Dreiecksform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{zu Dreiecksform überführen} \\ \hookrightarrow \text{Dreiecksmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 6 & 60 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Pivotzeile bleibt unverändert}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Neue Pivotzeile}$$

$\rightarrow$ Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente!

$\rightarrow$ Pro Zeilenvertauschung muss das Produkt der Diagonalen der Dreiecksmatrix mit (-1) multipliziert werden!

$$\begin{aligned} \text{oder mathematisch: } \det(A) &= (-1)^k \cdot \det(R) \\ &= (-1)^k \cdot r_{11} \cdot r_{22} \cdot \dots \cdot r_{nn} \end{aligned}$$

bei k -Zeilenvertauschungen

$\Rightarrow$ Jetzt haben wir eine (Rechts-) Dreiecksmatrix R

$\Rightarrow$ Es wurde keine Zeilenvertauschung vorgenommen

$\Rightarrow$ Diagonalprodukt muss 0-mal mit (-1) multipliziert werden!

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 8 & 8^2 \end{bmatrix} = \overbrace{(-1)^0}^1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 24 = \underline{\underline{48}}$$

AS: Lösen von Matrizen Gleichungen

Lösen sie die Matrix-Gleichung $A^{-1} \cdot X^{-1} \cdot B^T - E = A^{-1} \cdot X^{-1}$ nach X auf und berechnen Sie die Matrix unter Verwendung von:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot X^{-1} \cdot B^T - E = A^{-1} \cdot X^{-1} \quad | + E - A^{-1} X^{-1} \quad -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}$$

$$A^{-1} X^{-1} \cdot B^T - A^{-1} X^{-1} = E$$

$$A^{-1} X^{-1} (B^T - E) = E \quad | \cdot A$$

$$X^{-1} (B^T - E) = A$$

$$X^{-1} = \frac{A}{B^T - E}$$

$$\frac{1}{X} = \frac{A}{B^T - E}$$

$$(B^T - E) \cdot A^{-1} = X$$

$$(B^T - E) \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\parallel (B^T - E) \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -III \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & :3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & +\frac{2}{3} III \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -II \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A2: Gauss-Jordan-Algorithmus

Gegeben ist das lineare System
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Führen Sie für dieses System den Gauss-Jordan-Algorithmus explizit durch und geben Sie eine Parametrisierung der Lösungsvariablen an. Interpretieren Sie das Resultat geometrisch!

$$\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|lcl} 2x + y - 2z & = & -2 \\ -x - 2y + z & = & 1 \end{array}$$

Analyse: 2 Gleichungen + 3 Unbekannte

↳ um alle Variablen eindeutig zu bestimmen fehlt eine Gleichung!

→ Gauss-Algorithmus

Ausgangsschema:

x	y	z	
2	1	-2	-2
-1	-2	1	1

Vertausche Zeilen:

x	y	z	
-1	-2	1	1
2	1	-2	-2

1. Zeile mult. mit (-1):

x	y	z	
1	2	-1	-1
2	1	-2	-2

2. Zeile - 2 · 1. Zeile
(erste Zeile wird als
Pivot-Zeile gewählt)

x	y	z	
1	2	-1	-1
0	-3	0	0

falls noch weitere Zeilen unter der 2. Zeile folgen würden, so wären diese auch mit der Pivotzeile zu kombinieren, ausser der Wert in der x-Spalte wäre Null (0 · x₁)

← Pivotzeile: alle unter dieser Zeile stehenden Zeilen, welche an 1. Stelle eine Zahl ≠ 0 haben (hier II) müssen mit der Pivotzeile kombiniert werden!

2. Zeile: $-3y = 0 \rightarrow y = 0 \leftarrow y$ ist eindeutig $= 0$!

für z kann also keine Aussage gemacht werden, da nur 2 Gl. für 3 Unbekannte bestehen.

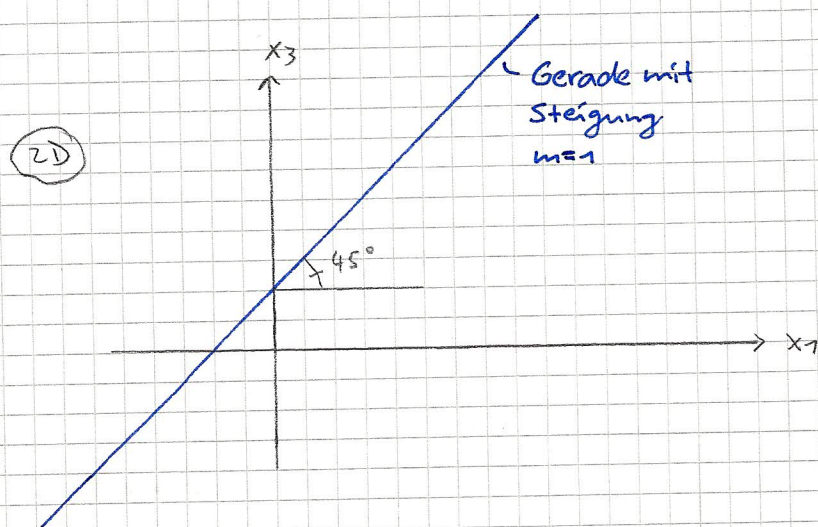
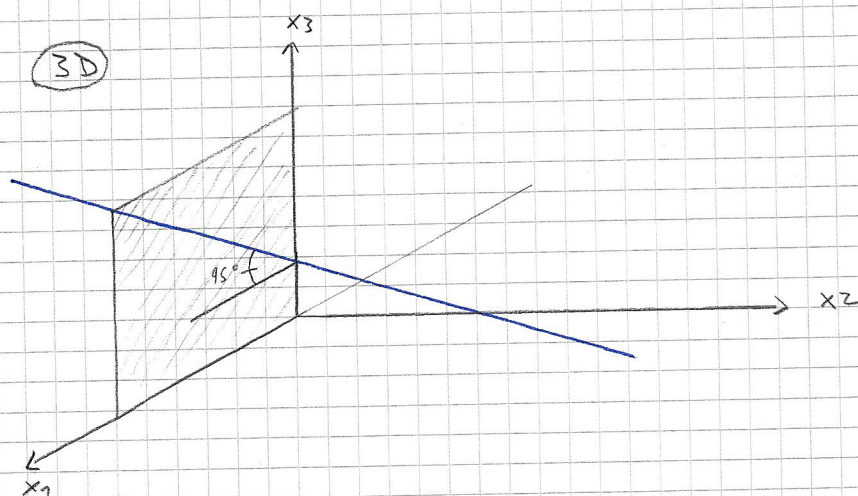
$\rightarrow$ wähle $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ aus 1. Zeile: $x - z = -1$

$\Rightarrow x = z - 1 \Leftarrow$ dies ist eine lineare Funktion (Graph),
also eine Gerade in der $x-z$ -Ebene!

$\Rightarrow$ Parameterlösung: $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{(\alpha - 1, 0, \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R})}}$

$\Rightarrow$ es bestehen also ∞ -viele Lösungen!

$\Rightarrow$ eine Gerade ist immer eine Darstellung ∞ -vieler Lösungen,
denn jeder Punkt stellt selbst eine Lösung dar!



MLAIT

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: $\vec{OA} = (a_1/a_2/a_3)$ zum Punkt A.
Zeigt vom Ursprung nach A auch $\vec{r}_A$

Kehrvektor: Kehrvektor von $\vec{a}$ ist gleich lang, schaut aber in die entgegenges. Richtung

Vektorsumme:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} =$$

Länge eines Vektors (Betrag)

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\rightarrow a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \\ = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Vektor vom Punkt A zum Punkt B

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Orthogonalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cos \alpha \text{ und } \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}_a| \cdot |\vec{a}|$$

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Gesetze des Skalarprodukts

falsch

1. Kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. Assoziativ: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

3. Distributiv: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. Betrag V: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

5. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = \alpha \beta \vec{a} \cdot \vec{b}$

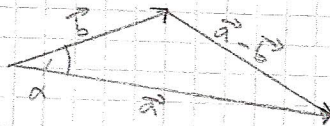
Berechnung SP mit Hilfe der Koordinaten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Cosinussatz

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$



Winkel zw. zwei Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

Parameterdarstellung der Geraden



$$g: \vec{ox} = \vec{OA} + t\vec{a}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

Durchläuft der Parameter t die reellen Zahlen, so durchläuft der Punkt x die Gerade g

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Gegenseitige Lage zweier Geraden g und h

$$g: \vec{ox} = \vec{OA} + t\vec{a}$$

$$h: \vec{ox} = \vec{OB} + s\vec{b}$$

Zusammenfallend

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ und } A \in h$$

Parallel

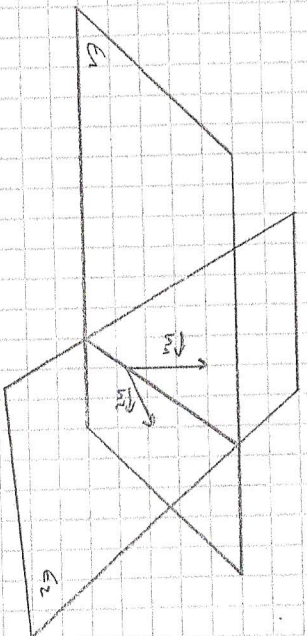
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ und } A \notin h$$

Sich schneiden

$$g \cap h = \{s\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{g}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{g}|}$$

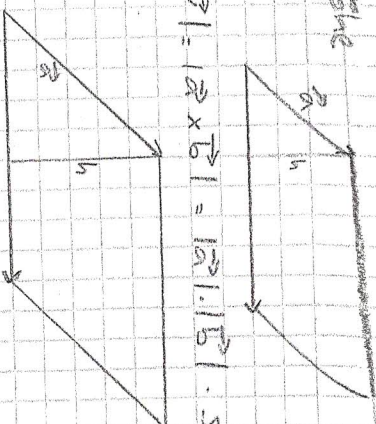
Schnittwinkel zweier Ebenen



$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Fläche eines Parallelogramms

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \omega = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



Da $\sin 0 = 0$, wenn 0° oder 180° , folgt aber Satz 1,5,2 ist $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$, so ist $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$