

Mathematik Zusammenfassung von Simon Thiel

Zahlenmengen: $\mathbb{N}$: Natürliche Zahlen

$\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$: Rationale Zahlen

$\mathbb{R}$: Reelle Zahlen

$\mathbb{I}$: Irrationale Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1, -8$

1, 2, 3, ... (0;)

... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Anz. Elemente

$|X|$ = Kardinalität von X

$P([0: n]) = 2^{n+1}$ → eine Menge X mit k Elementen hat eine

Potenzmenge $P(X)$ mit 2^k Elementen

0° 30° 45° 60° 90°

$\sin(x)$ 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$\cos(x)$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0

$\tan(x)$ 0 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 1 $\sqrt{3}$ /

Fakultät: $0! = 1$ $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

Betrag: $|x| = x$ $| -x | = x$

Intervallschreibweise:

$[-3, 3]$ → von -3 bis 3 inkl. -3 und 3

$(-3, 3)$ → von -3 bis 3 ohne -3 und 3

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 3x - 10 : (x+5) = x^2 + x - 2 \\ \underline{-(x^3 + 5x^2)} \\ x^2 + 3x - 10 \\ \underline{-(x^2 + 5x)} \\ -2x - 10 \\ \underline{-(-2x - 10)} \\ 0 \end{array}$$

Karnaugh Diagramm

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0

$$\begin{aligned} x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 &= 1 \\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4 &= 1 \\ x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4} &= 1 \\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4} &= 1 \end{aligned}$$

$(\overline{x_1} \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4})$

→ kürzeste Form

Boolsche Algebra

Operationen von Teilmengen

- Durchschnitt** $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Vereinigung** $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Komplement** $\bar{A} \text{ bzw. } \neg A = \{x \in X \mid x \notin A\}$
- Differenz** $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- Implikation** $A \Rightarrow B = (\bar{A} \cup B)$
- entweder Oder** $A \cup B = A \oplus B$
- Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A} \text{ bzw. } \neg A$	$A \setminus B$	$A \Rightarrow B$	$A \cup B$	$A \Leftrightarrow B$
1000	1010	1000	1010	0100	1000	1010	1010	0100
1001	1010	1000	1011	0100	1001	1010	1011	0100
1000	1011	1000	1011	0100	1000	1011	1011	0100
1001	1011	1001	1011	0100	1001	1011	1011	0100

Grundgesetze der booleschen Algebra

- $A \cap B = B \cap A$ / $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ / $A \cup \bar{A} = X$
- $X \cap A = A$ / $\emptyset \cup A = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\rightarrow$ Distributiv
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ / $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\rightarrow$ De Morgan
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \Rightarrow B} = A \cap \bar{B}$ $\rightarrow$ Modus ponens
- $\overline{A \Leftrightarrow B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ $\rightarrow$ Modus ponens

$A \cup B = A \Leftrightarrow B$	$A \cap B = A \Rightarrow B$	$\bar{A} = \emptyset$
$A \cap B = X \cdot Y = \min(x, y)$	$A \cup B = X + Y - X \cdot Y = \max(x, y)$	$\bar{A} = 1 - A$
$\frac{1}{1-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$	$(1+X)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k$	$\bar{A} = A$

<u>Binomische Formel</u>	<u>keine rationale Nullstellen</u>	<u>Faktorisierung</u>
$(a+b)^6 \rightarrow$ wir wollen 4. Glied	$x^2 - 2 \mid x^2 + 1$	von $ax^2 + bx - c$ wenn $a = b + c$ $(x+1)(ax-c)$
$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$		

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (-b)^k = (a-b)^n$$

Permutation ohne Wdh: n -verschiedene Elemente mit unterschiedlicher Anordnung $\rightarrow n!$

Permutation mit Wdh: n -Elemente mit untersch. Anordn., wobei das i -te

Element n_i mal auftritt $n!$
 $n! \rightarrow n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_s!$
 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$
 $(n_s! \leq 5)$

Variationen ohne Wdh: Aus n versch. Elementen werden k versch. Elem. unter

Berücksichtigung der Anordnung ausgewählt, wobei sich alle Elem
 bis zu k -mal wiederholen $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ ($1 \leq k \leq n$)

Variationen mit Wdh: Aus n versch. Elem. werden k versch. Elem. unter Berücksichtigung
 der Anordnung ausgewählt $\rightarrow n^k$

Kombinat. ohne Wdh: Aus n versch. Elem. werden k versch. Elem. ohne Berücks.
 der Anordn. ausgewählt $\rightarrow \binom{n}{k}$

Kombinat. mit Wdh: Aus n versch. Elem. werden k Elem. unter Berücks. der
 Anordnung ausgewählt, wobei sich alle Elem. bis zu
 k -mal wiederholen $\binom{n+k-1}{k}$ ($k \geq 1$)

Binominalkoeffizienten
 $\binom{m+n}{m, n} = \binom{m+n}{m} / \binom{m}{k}$ sprich k tief m

$$\binom{m+n}{m, n} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5!}{9!} = 126$$

Berechnung BK: $\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \dots \cdot (a-k+1)}{k!}$

Polynome $\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \deg(f) = n$
 a_k = Koeffizienten des Polynoms | $\deg(f(x)) = n$ (Grad)
 $(-2x^5 + 5x^2 - 3x + 2) \Rightarrow (2, -3, 5, 0, -2)$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots + (n-1)na_n x^{n-2} \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + \dots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3} \\ f^{(n)}(x) &= n! \end{aligned}$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$f'''(0) = 3! a_3 \rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Ableitungsregeln

- 1) $(c)' = 0$
 - 2) $(x)' = 1$
 - 3) $(\exp(x))' = \exp(x)$
 - 4) $(\log(x))' = \frac{1}{x}$
 - 5) $(\sin(x))' = \cos(x)$
 - 6) $(\cos(x))' = -\sin(x)$
 - 7) $(\tan(x))' = \frac{\cos^2(x)}{1}$
 - 8) $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - 9) $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - 10) $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
- Summe: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Produkt: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Ketten: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- Quotient: $(\frac{h}{g})' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{g^2}$
- Reziproken: $(\frac{1}{h})' = -\frac{h'}{h^2}$
- Potenz: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- Log. regel: $(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$

1. Ableitung: Steigung der Tangente

2. Ableitung: Krümmungsverhalten

Aufleiten

$$2x^3 = \frac{1}{4} \cdot 2x^4 = \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{2}x^4$$

→ Exponent + 1

→ Kehrwert von neuem Exponent vorne hin

Ableiten

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

GGT bei Polynome

→ euklidischer Algorithmus

$$\begin{array}{l} 253 : 143 = 1 \text{ Rest } 110 \\ 143 : 110 = 1 \text{ Rest } 33 \\ 110 : 33 = 3 \text{ Rest } 11 \\ 33 : 11 = 3 \text{ Rest } 0 \end{array}$$

$$\text{GGT} = \text{zuletztester Rest}$$

Irreduzible Polynome

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ &= (x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0 \\ &= (x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q \end{aligned}$$

$$= p^2 - 4q \Rightarrow \text{Diskriminante}$$

Umkehrbare Abbildungen: $f: M \rightarrow M$

eine n -elementige Menge hat $n!$ Bijektionen (umkehrbare Abb.)

Fixpunktfreie Permutationen

$$\begin{aligned} \text{Eine } n\text{-elementige Menge hat} \\ n! \left(\frac{0!}{1} - \frac{1!}{1} + \frac{2!}{2!} - \frac{3!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \right) \\ = n! \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$

n! fixpunktfreie Permutationen

Kurvendiskussion

Definitionsbereich (x-Achse)

Wertebereich (y-Achse) z.B. $\sin(x) \rightarrow -1 \dots 1$

Symmetrie bezgl. Koordinatenachse

Gerade (symmetr. zur y-Achse): $f(x) = f(-x) \rightarrow$ nur gerade Exponenten (inkl. 0)
Ungerade (symmetr. zur x-Achse): $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ nur ungerade Exponenten

Periodizität

(bei $\sin, \cos$)

Wendepunkte mit Koordinatenachse (N/S)

Extrempunkte + Monotonieverhalten

$f'(x)$ gleich 0 setzen | $3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$

Monoton steigend / fallend zw. Extrempunkten & zw. $-\infty$ und 1 EP + letzter EP und ∞

Wendepunkte + Krümmungsverhalten

$f''(x)$ gleich 0 setzen | $6x = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \rightarrow$ links Krümmung

$f''(x) < 0 \rightarrow$ rechts Krümmung

Asymptotisches Verhalten

Was die Funktion ggn ∞ und $-\infty$ macht
 $\rightarrow$ Grenzwert ($\lim$)
 $\rightarrow \pm \infty$
unf. ggn. Pole

Berechnung eines bestimmten Integrals

1. Stammfunktion $\mp(x)$ zum Integranden $f(x)$ bestimmen, ($\mp'(x) = f(x)$)
2. $\int_b^a f(x) dx = [\mp(x)]_b^a = \mp(b) - \mp(a)$

Faktorregel: $\int_b^a c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_b^a f(x) dx$

Summenregel: $\int_b^a (f_1(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_b^a f_1(x) dx + \dots + \int_b^a f_n(x) dx$

Gleiche Integrat.grenzen: $\int_a^a f(x) dx = 0$

Folgen

eine Folge a_n heisst arithmetisch, falls $a_{n+1} = a_n + d$ ($a_0 = \text{Anfangswert}$)
 $\rightarrow a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \dots \rightarrow a_n = a_n + nd \leftarrow \text{explizite Beschreibung}$

Summenfolge: $S_k = \sum_{n=0}^k a_n$

Unter der Summenfolge (Reihe) versteht man die Folge mit $S_n = \sum_{m=0}^n a_m$
 Partialsummenfolge $\searrow$

Unterschied arithm. + geom. Folge

Arithm.: Differenz zw. Gliedern ist konstant
 Geom.: Quotient ist konstant

	Rekursiv		explizit
	Arithm.	Geom.	
	$a_{k+1} = a_k + d$	$a_{k+1} = a_k \cdot q$	
	$\Delta^{(n)} a = d, \Delta^{(2)} a = 0$	$\Delta^{(n)} a = (q-1) \cdot a$	
	$a_k = a_0 + kd$	$a_k = a_0 \cdot q^k$	

	Reihe	
	Arithm.	Geom.
	$\sum_{k=0}^n a_k = d \cdot \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^n a_k = \left\{ \begin{array}{l} (n+1) a_0 \text{ bei } q=1 \\ a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ bei } q \neq 1 \end{array} \right.$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q} \quad | \quad |q| < 1$
 Grenzwert der Reihe

Sonstiges

$$\ln(e^x) = x \Leftrightarrow \exp(1) = e \quad / \quad \ln 1 = 0$$

$$\exp(-x) = \frac{\exp(x)}{1}$$

$$\exp(-1) = \frac{1}{e}$$

$$\sin^{-1} \{ -1 \dots 1 \}$$

$$\cos^{-1} \{ -1 \dots 1 \}$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \exp(\ln(2) \cdot \frac{1}{2})$$

$$f(x)g(x) = \exp((\log(f(x)) \cdot g(x)))$$

